Chapitre 11 | 16 mai 2026

Intégrales

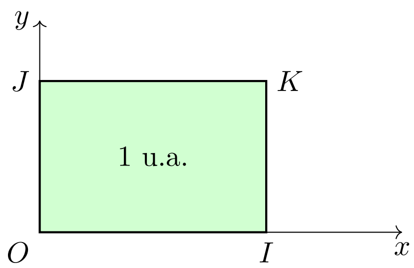
Objectifs du chapitre

- donner un sens géométrique à $\int_a^b f(x)\,dx$;
- estimer une intégrale par des rectangles, puis la calculer à l'aide d'une primitive ;
- distinguer l'**aire géométrique** et l'**aire algébrique** ;
- utiliser les propriétés essentielles : relation de Chasles, linéarité, croissance et valeur moyenne ;
- savoir calculer une aire sous une courbe et une aire entre deux courbes.

1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1.1: Unité d'aire

Dans un repère du plan, l'**unité d'aire** est l'aire du rectangle construit sur les vecteurs de base du repère.

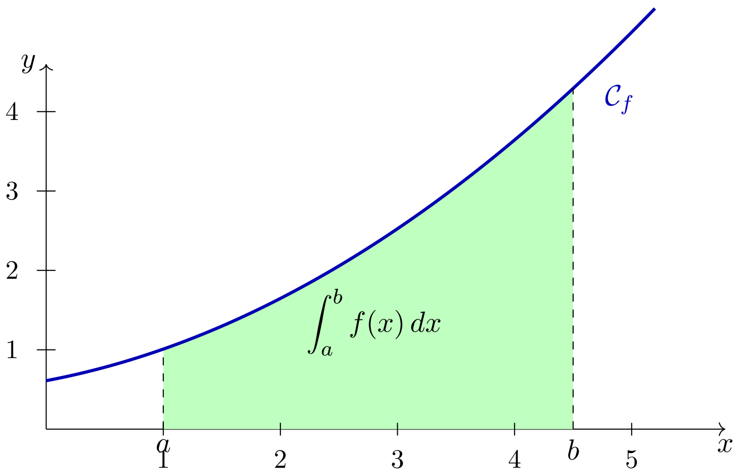


Définition 1.2: Intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. L'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple

Si $f(x) = 2$ sur $[-1;3]$, alors la courbe est une droite horizontale et l'intégrale est l'aire d'un rectangle :

$$\int_{-1}^{3} 2\,dx = 2 \times 4 = 8.$$

Si $f(x) = 0{,}5x$ sur $[0;6]$, alors l'intégrale est l'aire d'un triangle :

$$\int_{0}^{6} 0{,}5x\,dx = \frac{6 \times 3}{2} = 9.$$

Remarque· $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

- La variable d'intégration est **muette** :

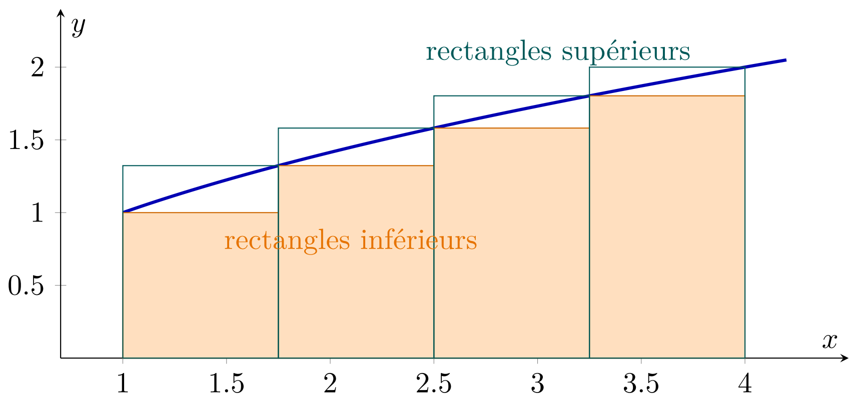
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

- Tant que $f \geq 0$, l'intégrale est un **nombre positif** puisqu'elle représente une aire.

2 Estimer une intégrale : la méthode des rectangles

Propriété 2.1: Méthode des rectangles

On partage $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude. En remplaçant la courbe par des rectangles *inférieurs* et *supérieurs*, on obtient un encadrement de l'intégrale. Lorsque n augmente, ces sommes se rapprochent de plus en plus de l'intégrale.



Méthode

Pour encadrer une intégrale par des rectangles :

1. on partage l'intervalle en intervalles de même amplitude ;
2. on choisit, sur chaque petit intervalle, une hauteur minimale et une hauteur maximale ;
3. on additionne les aires des rectangles obtenus ;
4. si la fonction est croissante, les rectangles à gauche sont inférieurs et ceux à droite sont supérieurs.

Exemple

Sur $[1;6]$, la fonction ln est croissante. Si l'on partage l'intervalle en cinq intervalles de longueur 1, on obtient :

$$\ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5) \leq \int_1^6 \ln(x)\,dx \leq \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5) + \ln(6).$$

3 Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Théorème 3.1: Existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème 3.2: Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. On définit la fonction F sur $[a; b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F est une primitive de f sur $[a; b]$ et $F(a) = 0$.

Démonstration dans un cas particulier. On suppose ici que f est **continue, positive et croissante** sur $[a; b]$. Montrons que, pour tout $c \in [a; b]$, on a $F'(c) = f(c)$.
Soit $h \neq 0$ tel que $c + h \in [a; b]$. Par la relation de Chasles,

$$F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

Cas $h > 0$. Comme f est croissante sur $[c; c + h]$, pour tout $t \in [c; c + h]$,

$$f(c) \leq f(t) \leq f(c + h).$$

En intégrant cette inégalité sur $[c; c + h]$, on obtient

$$hf(c) \leq \int_c^{c+h} f(t)\,dt \leq hf(c + h).$$

Comme $h > 0$, on peut diviser par h :

$$f(c) \leq \frac{F(c + h) - F(c)}{h} \leq f(c + h).$$

Quand $h \to 0^+$, la continuité de f en c donne $f(c + h) \to f(c)$, donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Cas $h < 0$. Comme f est croissante sur $[c + h; c]$, pour tout $t \in [c + h; c]$,

$$f(c + h) \leq f(t) \leq f(c).$$

En intégrant sur $[c + h; c]$, puis en utilisant

$$\int_{c+h}^{c} f(t)\,dt = -\int_c^{c+h} f(t)\,dt = -(F(c + h) - F(c)),$$

on obtient

$$-hf(c + h) \leq -(F(c + h) - F(c)) \leq -hf(c).$$

Comme $h < 0$, la division par h inverse les inégalités :

$$f(c + h) \leq \frac{F(c + h) - F(c)}{h} \leq f(c).$$

Quand $h \to 0^-$, la continuité de f en c donne encore, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Les limites à droite et à gauche étant égales à $f(c)$, on a bien

$$F'(c) = f(c).$$

Ainsi, dans ce cas particulier, F est une primitive de f sur $[a; b]$. De plus,

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

□

Propriété 3.1: Conséquence pour le calcul d'une intégrale

Si f est continue sur $[a;b]$ et si G est une primitive de f sur $[a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Exemple

Pour calculer

$$I = \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\,dx,$$

on cherche une primitive :

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x.$$

Donc

$$I = F(4) - F(-1) = \frac{125}{6}.$$

Deux réflexes utiles

1. Reconnaître une forme usuelle.

$f(x)$	Une primitive de f
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$\ln x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

2. Reconnaître une forme $u'f(u)$ ou $\frac{u'}{u}$.

Par exemple, si $u(x) = x^2 + 1$, alors

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + C.$$

Propriété 3.2: Intégration par parties

Si u et v sont dérivables sur $[a;b]$, avec u' et v' continues, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Exemple

Pour calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx$, on pose

$$u(x) = \ln(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 1.$$

On peut choisir $v(x) = x$, donc

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx = \left[x\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,dx = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

4 Propriétés essentielles de l'intégrale

Propriété 4.1: Relation de Chasles

Si $a \leq b \leq c$, alors
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Propriété 4.2: Linéarité

Pour tous réels α et β,
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

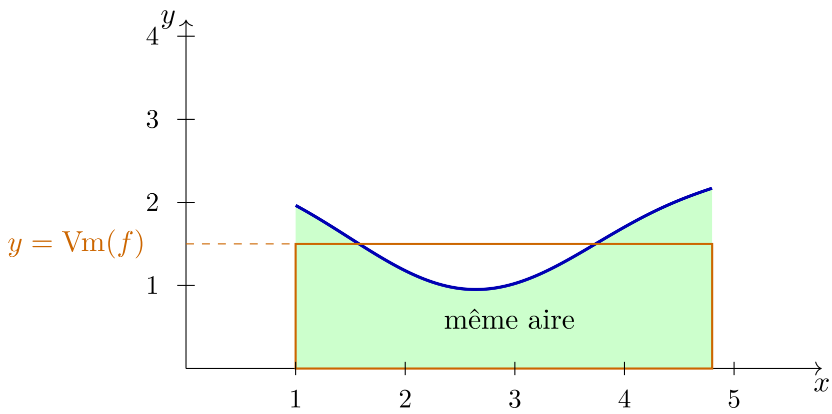
Propriété 4.3: Croissance

Si f et g sont continues sur $[a;b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Définition 4.1: Valeur moyenne

La **valeur moyenne** d'une fonction continue f sur $[a;b]$ est
$$\mathrm{Vm}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Elle représente la hauteur du rectangle de base $b-a$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.



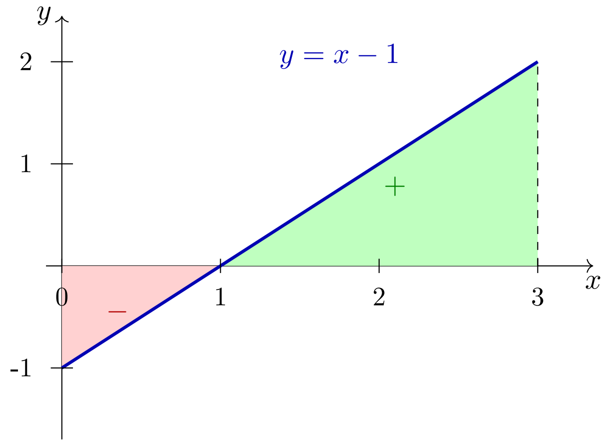
Propriété 4.4: Inégalité de la moyenne

Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a;b]$, alors
$$m \leq \mathrm{Vm}(f) \leq M.$$

5 Fonctions de signe quelconque et aire algébrique

Définition 5.1: Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Si f change de signe sur $[a;b]$, l'intégrale n'est plus une aire géométrique au sens strict, mais une **aire algébrique** : les parties au-dessus de l'axe des abscisses comptent positivement, celles situées en dessous comptent négativement.



Remarque

Si l'on cherche l'**aire géométrique** entre la courbe et l'axe des abscisses, il faut additionner des aires positives. En pratique, on découpe l'intervalle en morceaux sur lesquels f garde un signe constant, ou bien on calcule une intégrale de $|f|$.

Exemple

Sur $[0;3]$, la fonction $f(x) = x - 1$ change de signe en $x = 1$. On a

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

L'aire géométrique vaut au contraire

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

6 Calculer une aire avec une intégrale

1. Aire sous une courbe

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, alors

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si $f \leq 0$ sur $[a;b]$, alors

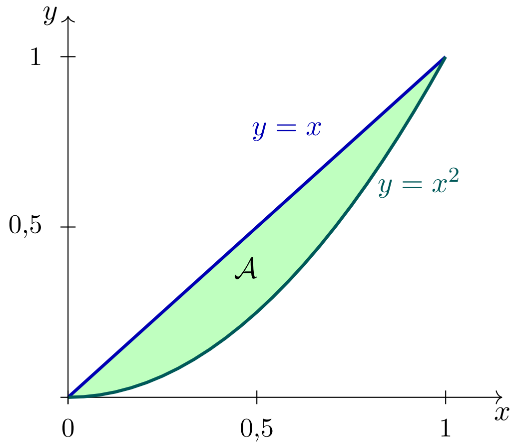
$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si f change de signe, on découpe l'intervalle.

2. Aire entre deux courbes

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$, alors l'aire comprise entre les courbes de f et g vaut

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Exemple

Entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0; 1]$, on a $x \geq x^2$, donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

7 À retenir

Bilan du chapitre

- Pour une fonction continue et positive, l'intégrale sur $[a; b]$ représente une aire.
- Pour calculer une intégrale, on cherche en priorité une primitive :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

- L'intégrale d'une fonction qui change de signe est une **aire algébrique**.
- L'aire géométrique nécessite des quantités positives : on découpe selon le signe ou l'on utilise $|f|$.
- Pour deux courbes f et g, on soustrait la courbe du dessous à la courbe du dessus.
- La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est :

$$\text{Vm}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

8 exercices

A. Interpréter et estimer une intégrale

Exercice 1 — Aire d'un triangle

Calculer $\int_0^6 0{,}5x\,dx$ par un calcul d'aire.

Exercice 2 — Aire d'un trapèze

Calculer $\int_{-2}^4 (3 - 0{,}5x)\,dx$ par un calcul d'aire.

Exercice 3 — Fonction constante

Représenter la fonction $f(x) = 2$ sur $[-1; 3]$ puis calculer $\int_{-1}^3 2\,dx$.

Exercice 4 — Rectangles et logarithme

En divisant l'intervalle $[1;6]$ en cinq intervalles de même longueur, encadrer

$$\int_1^6 \ln(x)\,dx.$$

Exercice 5 — Rectangles et fonction inverse

On considère la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1;2]$. En partageant l'intervalle en cinq sous-intervalles de même longueur, proposer un encadrement de

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

B. Calculer des intégrales à l'aide d'une primitive

Exercice 6 — Polynôme

Calculer

$$\int_{-1}^4 (x^2-1)\,dx.$$

Exercice 7 — Polynôme du second degré

Calculer

$$\int_{-1}^4 (-x^2+3x+4)\,dx.$$

Exercice 8 — Puissance et exponentielle

Calculer

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,dx.$$

Exercice 9 — Forme u'/u

Calculer

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$$

Exercice 10 — Logarithme

Calculer

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,dx.$$

C. Propriétés de l'intégrale

Exercice 11 — Chasles

Sachant que

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3 \quad \text{et} \quad \int_2^5 f(x)\,dx = -1,$$

calculer $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$.

Exercice 12 — Linéarité

Sachant que

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_1^4 g(x)\,dx = 5,$$

calculer

$$\int_1^4 (3f(x)-2g(x))\,dx.$$

Exercice 13 — Croissance

Sans calculer les intégrales, comparer :

$$\int_0^2 x^2\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^2 (x^2+1)\,dx.$$

Justifier.

Exercice 14 — Signe d'une intégrale

Donner le signe de chacune des intégrales suivantes sans les calculer :

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_1^2 \ln(x)\,dx, \qquad \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x\,dx.$$

Exercice 15 — Fonction par morceaux

Soit f définie sur $[0;3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ -x+3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.

D. Valeur moyenne et aires

Exercice 16 — Valeur moyenne simple

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2 + 3$ sur $[-2;2]$.

Exercice 17 — Valeur moyenne connue

On sait que la valeur moyenne d'une fonction continue g sur $[1;3]$ vaut $\ln(2)$. Calculer

$$\int_1^3 g(x)\,dx.$$

Exercice 18 — Aire algébrique et aire géométrique

Pour $f(x) = x - 1$ sur $[0;3]$:

1. calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$;
2. calculer l'aire géométrique entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0;3]$.

Exercice 19 — Aire sous une parabole

Déterminer l'aire comprise entre la courbe de $f(x) = x^2 - 4$ et l'axe des abscisses entre $x = -2$ et $x = 2$.

Exercice 20 — Aire entre deux courbes

Déterminer l'aire comprise entre les courbes $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice 21 — Aire entre une droite et une parabole

On considère $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$ sur $[-1;2]$.

1. déterminer les points d'intersection des deux courbes ;
2. déterminer l'aire comprise entre les deux courbes sur $[-1;2]$.