

Primitives et équations différentielles

Introduction

Objectifs :

- comprendre ce qu'est une **primitive** et savoir l'interpréter comme solution de l'équation différentielle $y' = f$;
- connaître les **primitives usuelles** et savoir calculer une primitive par reconnaissance de formes;
- savoir déterminer **l'ensemble des primitives** d'une fonction et utiliser une **condition initiale**;
- résoudre les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants de la forme $y' = ay$ et $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$;
- mobiliser ces outils dans des exercices de calcul, de justification, de modélisation et d'algorithmique.

Remarque

Cette section introduit la notion d'**équation différentielle** sur des cas simples. Les élèves découvrent en situation le concept d'équation dont l'inconnue est une **fonction**. L'équation $y' = f$ est l'occasion de définir la notion de primitive.

Par définition, la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées. Il est utile d'admettre ici que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives; ce résultat sera redémontré plus loin dans le cadre du calcul intégral. On note aussi que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite en termes de fonctions usuelles.

L'équation $y' = ay + b$ permet de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle. Lorsque $b = 0$, on remarque que le produit d'une solution par une constante est encore une solution.

Pour travailler la notion d'équation différentielle, on peut également donner d'autres exemples dont on peut admettre les solutions sans en faire une résolution complète : $y' = y^2$ ou encore $y'' + \omega^2 y = 0$.

Repères du chapitre

Contenus

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$; allure des courbes et rôle d'une condition initiale.

Capacités attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, déterminer une solution particulière constante puis utiliser cette solution pour obtenir toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$, à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \neq 0$.

1 Équations différentielles et primitives

Définition 1.1: Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y , ses dérivées et éventuellement d'autres fonctions ou constantes.

Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction dérivable qui vérifie cette égalité.

Remarque

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer **toutes** les fonctions solutions. Au lycée, on rencontre surtout des équations du **premier ordre**.

- ① La dérivée est associée à un **taux de variation**, c'est-à-dire au quotient des variations de y sur les variations de x ; d'où le terme différentielle.
- ② On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

selon la variable étudiée.

Exemple

Voici quelques écritures possibles d'équations différentielles :

- $2y' + 3y = 0$;
- $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$;
- $\frac{dy}{dt} + 5y = 0$;

$$\bullet \frac{dy}{dx} = 2y(x) + x^2.$$

Définition 1.2: Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Autrement dit, une primitive de f est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple • La fonction $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur \mathbb{R} .

• Sur $]0; +\infty[$, la fonction $F(x) = -\frac{1}{x}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Propriété 1.1: Condition suffisante d'existence

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .

Remarque

L'existence d'une primitive ne signifie pas forcément qu'on puisse l'exprimer avec les fonctions usuelles. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet des primitives sur \mathbb{R} , mais elles ne s'expriment pas simplement à l'aide des fonctions usuelles.

2 Existence et calcul de primitives

Propriété 2.1: Ensemble des primitives et condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I .

- Toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- Pour tous $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(a) = b$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction u définie par $u(x) = F(x) + k$ vérifie

$$u'(x) = F'(x) + 0 = f(x),$$

donc u est encore une primitive de f sur I .

Réciproquement, soit G une autre primitive de f sur I . Alors

$$G'(x) = f(x) = F'(x).$$

Ainsi,

$$G'(x) - F'(x) = 0.$$

Posons $U(x) = G(x) - F(x)$. On a alors $U'(x) = 0$, donc U est constante sur I . Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$U(x) = C \quad \text{sur } I,$$

c'est-à-dire

$$G(x) - F(x) = C \quad \text{puis} \quad G(x) = F(x) + C.$$

Ainsi, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Si de plus on impose la condition $G(a) = b$, alors

$$b = G(a) = F(a) + C,$$

d'où

$$C = b - F(a).$$

La primitive vérifiant $G(a) = b$ est donc

$$G(x) = F(x) + b - F(a),$$

et elle est unique.

Exemple

Une primitive de $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ sur \mathbb{R} est

$$F(x) = -4 \cos\left(\frac{x}{4}\right).$$

Donc toutes les primitives sont de la forme

$$x \mapsto -4 \cos\left(\frac{x}{4}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La primitive qui vaut 0 en 2π correspond à $k = 0$.

Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	selon le domaine
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$	$] - \infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	\mathbb{R}

Remarque

Pour $f(x) = x^n$ avec $n < 0$ et $n \neq -1$, il faut travailler sur un intervalle où l'expression est définie, par exemple $]0; +\infty[$ ou $] - \infty; 0[$.

Primitives de fonctions composées

Propriété 2.2: Forme générale à reconnaître

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telle que, pour tout $x \in I$, on ait $u(x) \in J$.

$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle J et, pour tout $x \in I, u(x) \in J$
--------------------------	-------------	---

Autrement dit, une primitive de

$$(v' \circ u)(x) u'(x)$$

est

$$(v \circ u)(x) + k.$$

Propriété 2.3: Formes à reconnaître

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$, alors une primitive de $u'(x) u(x)^n$ est

$$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + k.$$

- Une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est

$$\ln |u(x)| + k$$

sur tout intervalle où u ne s'annule pas.

- Une primitive de $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ est

$$2\sqrt{u(x)} + k$$

sur tout intervalle où $u(x) > 0$.

- Une primitive de $u'(x)e^{u(x)}$ est

$$e^{u(x)} + k.$$

- Une primitive de $u'(x) \cos(u(x))$ est

$$\sin(u(x)) + k,$$

et une primitive de $u'(x) \sin(u(x))$ est

$$-\cos(u(x)) + k.$$

Propriété 2.4: Linéarité

Si U est une primitive de u sur I et V une primitive de v sur I , alors :

- $U + V$ est une primitive de $u + v$ sur I ;
- pour tout réel λ , la fonction λU est une primitive de λu sur I .

Exemple

Une primitive de

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$$

sur $]0; +\infty[$ est

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \ln(x).$$

Exemple

Pour calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

il faut tenir compte du domaine de définition. Comme $\sin x = 0$ pour $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on travaille sur un intervalle qui ne coupe pas ces zéros.

Sur tout intervalle où $\sin x$ ne s'annule pas, on a

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + k.$$

Par exemple :

- sur $]0; \pi[$, une primitive est $x \mapsto \ln(\sin x)$;
- sur $]\pi; 2\pi[$, une primitive est $x \mapsto \ln(-\sin x)$.

3 Résolution des équations différentielles

Théorème 3.1: Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, avec condition initiale

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont les fonctions

$$x \mapsto Ke^{ax}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution f telle que

$$f(x_0) = y_0.$$

Cette solution est donnée par

$$f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Démonstration. Première étape : vérifions que toute fonction de la forme $y(x) = Ke^{ax}$ est solution. En effet,

$$y'(x) = Kae^{ax} = ay(x).$$

Donc toute fonction $x \mapsto Ke^{ax}$ est bien solution de $y' = ay$.

Deuxième étape : montrons que ce sont les seules solutions. Soit g une solution de $y' = ay$. On définit

$$t(x) = e^{-ax}g(x).$$

La fonction t est dérivable et

$$t'(x) = (-ae^{-ax})g(x) + e^{-ax}g'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}ag(x) = 0.$$

Ainsi, t est constante sur \mathbb{R} . Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$t(x) = K.$$

Autrement dit,

$$e^{-ax}g(x) = K,$$

puis

$$g(x) = Ke^{ax}.$$

Ainsi, toutes les solutions de $y' = ay$ sont bien de la forme Ke^{ax} . La condition initiale $y(x_0) = y_0$ impose alors

$$K = y_0 e^{-ax_0},$$

d'où l'unique solution

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Remarque

On retient parfois la forme des solutions par une démarche rapide : si y ne s'annule pas, alors

$$y' = ay \iff \frac{y'}{y} = a.$$

En intégrant, on obtient

$$\ln |y| = ax + C,$$

puis

$$|y| = e^{ax+C} = k_1 e^{ax},$$

et finalement

$$y = Ke^{ax}.$$

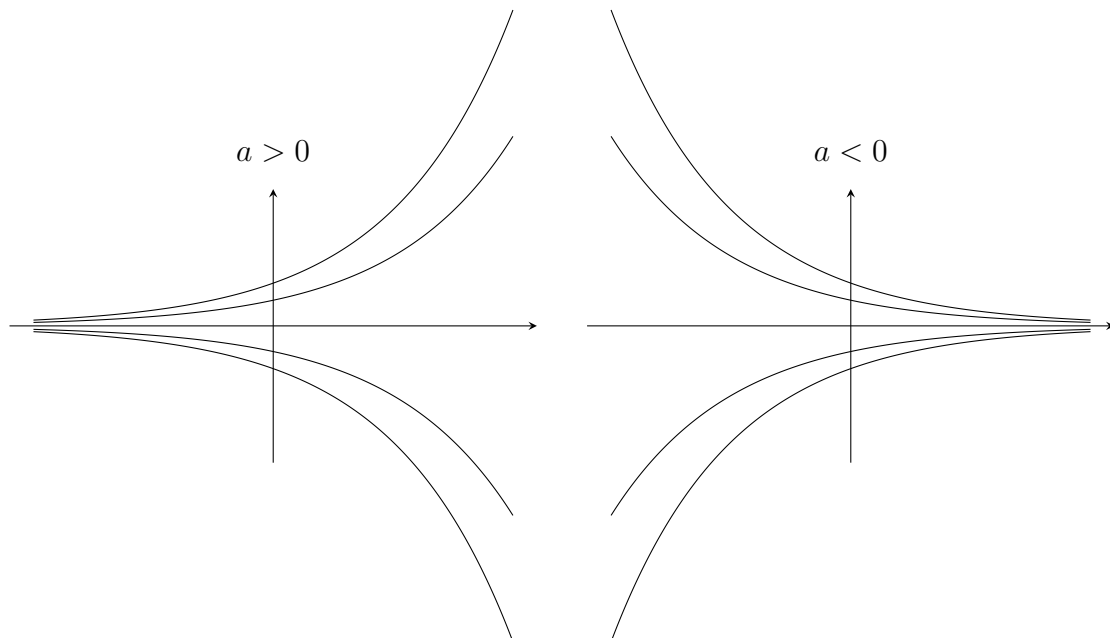
Cette méthode est utile pour mémoriser le résultat, mais la démonstration rigoureuse précédente reste la plus sûre.

Remarque

Le cas $a = 0$ se traite immédiatement : l'équation devient $y' = 0$, donc ses solutions sont les fonctions constantes.

Remarque

Une solution non nulle de $y' = ay$ ne change jamais de signe. Si une solution s'annule en un point, alors la condition initiale montre qu'elle est identiquement nulle.



Théorème 3.2: Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, avec condition initiale

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions

$$x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution f telle que

$$f(x_0) = y_0.$$

Cette solution est donnée par

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

Démonstration. Première étape : montrons que toute fonction

$$y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

est solution de $y' = ay + b$. On a

$$y'(x) = Kae^{ax},$$

et

$$ay(x) + b = a \left(Ke^{ax} - \frac{b}{a} \right) + b = Kae^{ax} - b + b = Kae^{ax}.$$

Donc $y'(x) = ay(x) + b$.

Deuxième étape : La fonction constante $f : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation (correspondant au cas $K = 0$).

Soit maintenant g une solution quelconque de $y' = ay + b$. Alors

$$g'(x) = ag(x) + b \quad \text{et} \quad f'(x) = af(x) + b.$$

En soustrayant, on obtient

$$g'(x) - f'(x) = a(g(x) - f(x)).$$

Si l'on pose

$$u(x) = g(x) - f(x),$$

alors u est solution de l'équation

$$u' = au.$$

Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x) = Ke^{ax}.$$

Comme $u(x) = g(x) - f(x)$, on en déduit

$$g(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Ainsi, toutes les solutions de $y' = ay + b$ sont bien de la forme annoncée. La condition initiale $y(x_0) = y_0$ impose alors

$$K = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{-ax_0},$$

d'où l'unique solution

$$y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

Exemple

L'équation différentielle

$$y' = y - 1$$

a pour solutions les fonctions

$$y(x) = 1 + Ke^x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Méthode générale si l'on connaît une solution particulière

Propriété 3.1: Principe de translation par une solution particulière

Soit l'équation différentielle

$$y' = ay + \varphi(x)$$

et soit y_p une solution particulière, c'est-à-dire telle que

$$y'_p = ay_p + \varphi(x).$$

En soustrayant membre à membre, on obtient

$$y' - y'_p = (ay + \varphi(x)) - (ay_p + \varphi(x)).$$

$$y' - y'_p = a(y - y_p).$$

Le terme $\varphi(x)$ disparaît par soustraction : c'est l'idée essentielle.

Posons $z = y - y_p$. on obtient alors

$$z' = az.$$

Réciproquement, si z vérifie $z' = az$ et si l'on pose $y = z + y_p$, alors

$$y' = z' + y'_p = az + ay_p + \varphi(x) = a(z + y_p) + \varphi(x) = ay + \varphi(x).$$

Ainsi, une fonction y est solution de $y' = ay + \varphi(x)$ si et seulement si $z = y - y_p$ est solution de l'équation plus simple

$$z' = az.$$

Comme les solutions de $z' = az$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, on obtient finalement

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{ax}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Remarque

On parle de **translation** parce que, lorsqu'on connaît une solution particulière y_p , toutes les autres solutions s'obtiennent en lui ajoutant une solution de l'équation homogène $z' = az$. On déplace donc la famille des courbes de $z' = az$ en la "centrant" autour de y_p .

4 Complément pour les curieux (Hors Programme!)

Remarque de méthode : d'où vient le terme $-\frac{b}{a}$?

Remarque

Dans le théorème sur l'équation

$$y' = ay + b,$$

le terme $-\frac{b}{a}$ peut donner l'impression d'être « parachuté ». En réalité, il apparaît de deux façons complémentaires.

1) Première lecture : chercher une solution particulière constante.

Si l'on cherche une solution constante $y_p(x) = c$, alors $y'_p(x) = 0$ et l'équation devient

$$0 = ac + b.$$

Comme $a \neq 0$, on obtient

$$c = -\frac{b}{a}.$$

On retrouve ainsi la solution particulière constante

$$y_p(x) = -\frac{b}{a}.$$

C'est la méthode la plus rapide dans le cas où le second membre est constant.

2) Deuxième lecture : comprendre le résultat par la variation de la constante.

Pour l'équation homogène associée

$$y' = ay,$$

les solutions sont de la forme

$$y(x) = Ce^{ax},$$

où C est une constante.

L'expression **variation de la constante** signifie précisément que, pour résoudre l'équation avec second membre, on garde la même forme mais on autorise la constante C à devenir une fonction de x . On cherche donc une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)e^{ax}.$$

La "constante" ne reste plus constante : elle varie. C'est ce qui justifie le nom de la méthode.

En dérivant, on obtient

$$y'(x) = u'(x)e^{ax} + au(x)e^{ax}.$$

• Dans le cas $y' = ay + b$, on remplace dans l'équation :

$$u'(x)e^{ax} + au(x)e^{ax} = au(x)e^{ax} + b.$$

Les termes $au(x)e^{ax}$ se simplifient, donc

$$u'(x)e^{ax} = b \quad \Longleftrightarrow \quad u'(x) = be^{-ax}.$$

En intégrant,

$$u(x) = \int be^{-ax} dx = -\frac{b}{a}e^{-ax} + C.$$

Ainsi,

$$y(x) = u(x)e^{ax} = \left(-\frac{b}{a}e^{-ax} + C\right)e^{ax} = Ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

On retrouve bien le terme $-\frac{b}{a}$.

- Plus généralement, pour $y' = ay + \varphi(x)$, le même calcul donne

$$u'(x)e^{ax} = \varphi(x), \quad \text{donc} \quad u'(x) = \varphi(x)e^{-ax}.$$

En intégrant,

$$u(x) = \int \varphi(x)e^{-ax} dx + C,$$

et par conséquent

$$y(x) = e^{ax} \left(\int \varphi(x)e^{-ax} dx + C \right).$$

3) Sens du mot « homogène » et distinction avec « autonome ».

Il faut distinguer ici deux idées.

a) Le mot « homogène » dans ce chapitre.

L'équation linéaire

$$y' - ay = \varphi(x)$$

est dite **homogène** lorsque son second membre est nul, c'est-à-dire lorsque

$$y' - ay = 0, \quad \text{ou encore} \quad y' = ay.$$

Le mot « homogène » a donc ici un sens **algébrique** : il signifie qu'il n'y a pas de terme ajouté au second membre.

b) La propriété graphique « à même hauteur, même pente ».

Cette propriété correspond en réalité au fait que la pente ne dépend que de y . On est alors en présence d'une équation de la forme

$$y' = f(y),$$

que l'on appelle **équation autonome**.

Le mot « autonome » vient du langage courant : il désigne quelque chose qui fonctionne par sa propre loi, sans dépendre d'une commande extérieure. Ici, cela signifie que l'évolution du système est déterminée par son **état présent** : dès que l'on connaît la valeur de y , on connaît la pente. L'équation n'a donc pas besoin de « regarder » explicitement la variable x . On peut dire avec des mots simples qu'une équation autonome se pilote toute seule à partir de sa hauteur actuelle.

Ainsi :

- $y' = ay$ est à la fois **homogène** et **autonome** ;
- $y' = ay + b$ avec b constant est **autonome**, mais **non homogène** ;
- $y' = ay + \varphi(x)$ avec φ non constante n'est en général **ni homogène ni autonome**.

En effet, pour $y' = ay + b$, la pente en un point vaut

$$y' = ay + b.$$

Elle dépend encore uniquement de la hauteur y , donc sur toute droite horizontale $y = c$, la pente est constante et vaut

$$y' = ac + b.$$

On peut donc encore dire avec les mots des élèves : sur une même hauteur, c'est la même pente.

Cela ne signifie pas que l'équation est homogène, mais seulement qu'elle est autonome.

Si $a \neq 0$, on peut d'ailleurs écrire

$$y' = ay + b = a \left(y + \frac{b}{a} \right).$$

En posant

$$z = y + \frac{b}{a},$$

on obtient

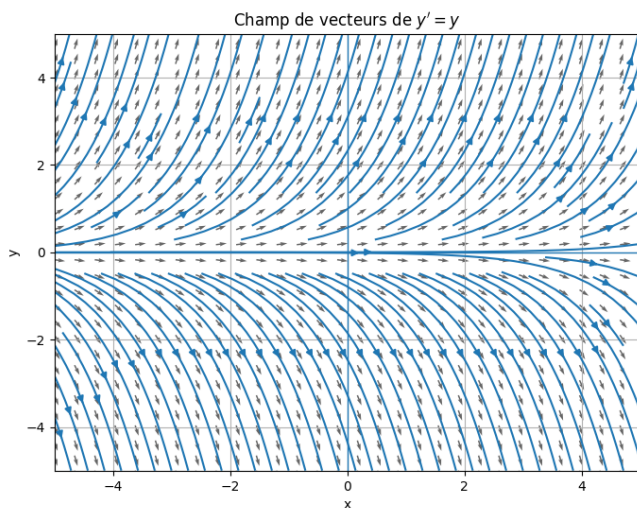
$$z' = az.$$

L'équation $y' = ay + b$ apparaît donc comme une équation homogène **translatée** : cela explique pourquoi son champ de directions garde une organisation simple, tout en restant non homogène au sens algébrique.

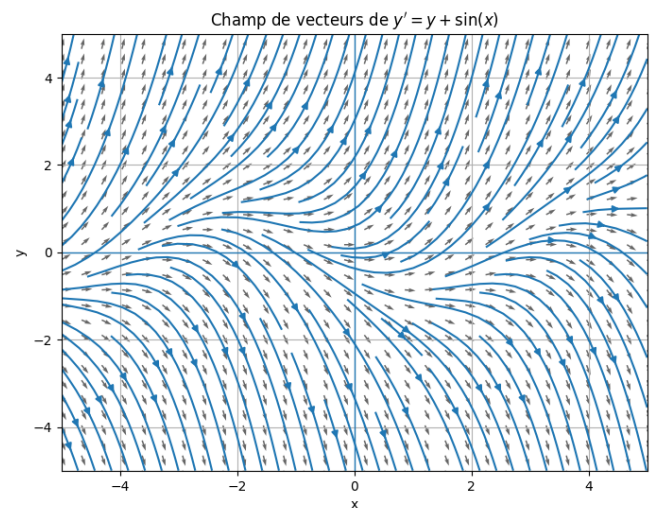
Illustration par les champs de directions

Remarque

Les deux champs de directions ci-dessous permettent de visualiser concrètement la différence entre une équation homogène et une équation avec second membre variable. Ils montrent bien ce qui se passe lorsque le terme ajouté dépend de x . En revanche, si le second membre est une constante b , l'équation $y' = ay + b$ reste autonome : à même hauteur, la pente reste la même, même si l'équation n'est plus homogène.



Équation homogène : $y' = y$



Équation avec second membre :
 $y' = y + \sin(x)$

Lecture du premier champ. Pour l'équation homogène

$$y' = y,$$

la pente en un point ne dépend que de la valeur de y . Ainsi, sur chaque droite horizontale $y = c$, la pente est constante et vaut toujours c . On retrouve bien l'idée langagière déjà évoquée : à même hauteur, même pente. Visuellement, c'est aussi une signature des équations **autonomes** de la forme $y' = f(y)$: l'évolution est entièrement gouvernée par la valeur actuelle de y , sans dépendre explicitement de x . Dans le cas présent, l'équation est à la fois autonome et homogène.

Lecture du second champ. Pour l'équation

$$y' = y + \sin(x),$$

la pente dépend à la fois de y et de x . Deux points placés à la même hauteur n'ont donc plus forcément la même pente, car le terme $\sin(x)$ ajoute une contribution qui varie avec l'abscisse. Les lignes de pente égale ne sont plus horizontales : le champ « ondule » selon x .

Ainsi, ce second dessin illustre non seulement une équation **non homogène**, mais aussi une équation **non autonome**. Il ne faut donc pas en déduire que toute équation non homogène perd la propriété « à même hauteur, même pente » : l'équation $y' = ay + b$ avec b constant reste autonome, bien qu'elle soit non homogène.

Lien avec la solution particulière. Si l'on connaît une solution particulière y_p de

$$y' = y + \sin(x),$$

et si l'on pose $z = y - y_p$, alors

$$z' = z.$$

Autrement dit, après translation par y_p , on retrouve le comportement de l'équation homogène. C'est précisément ce qu'expriment le principe de translation et la méthode de variation de la constante : une équation avec second membre se ramène à une équation homogène une fois que l'on a compensé l'effet du second membre.

Vocabulaire : condition de Cauchy et courbe intégrale

Remarque

Pourquoi dit-on « condition de Cauchy » plutôt que « condition initiale » ?

Pour une équation différentielle de la forme

$$y' = f(x, y),$$

accompagnée d'une donnée

$$y(x_0) = y_0,$$

on parle souvent, au lycée, de **condition initiale**. Cette expression est naturelle lorsqu'on pense à un phénomène qui démarre à un instant initial, souvent noté 0.

Mais, d'un point de vue plus mathématique, la donnée peut être imposée en n'importe quel point x_0 de l'intervalle étudié, et pas seulement à l'origine du temps. C'est pourquoi on parle aussi de **condition de Cauchy**. Le **problème de Cauchy** consiste à chercher une solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition

$$y(x_0) = y_0.$$

Le lien avec le **théorème de Cauchy-Lipschitz** est le suivant : sous des hypothèses de régularité sur le second membre f , ce théorème affirme qu'une telle donnée détermine localement une unique solution. Autrement dit, la condition de Cauchy sert à sélectionner une seule solution parmi toute une famille de courbes possibles.

Dans ce chapitre, on voit déjà cette idée sur des exemples simples. Pour l'équation $y' = ay$, l'ensemble des solutions est

$$y(x) = Ce^{ax}.$$

La donnée $y(x_0) = y_0$ impose alors la valeur de la constante C et ne laisse qu'une seule solution. Ainsi, dans le cadre du cours, on peut retenir que condition initiale et condition de Cauchy désignent la même donnée ; le second terme est simplement plus théorique.

Remarque

Pourquoi parle-t-on de « courbe intégrale » ?

Pour une équation différentielle

$$y' = f(x, y),$$

une solution y donne une courbe dans le plan : c'est sa courbe représentative.

En chaque point $(x, y(x))$ de cette courbe, son coefficient directeur vaut

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Autrement dit, la pente de la courbe est exactement celle imposée par l'équation différentielle. La courbe suit donc le champ de directions associé à l'équation et lui est tangente en chacun de ses points.

C'est pour cette raison qu'on l'appelle **courbe intégrale** : c'est la courbe représentative d'une solution, c'est-à-dire d'une fonction qui intègre en quelque sorte les pentes données par l'équation.

On peut reformuler cela avec les mots des élèves : une courbe intégrale est une courbe qui épouse localement les pentes du champ. Dès lors, imposer une condition de Cauchy $y(x_0) = y_0$, c'est demander : parmi toutes les courbes intégrales possibles, laquelle passe par le point (x_0, y_0) ?

5 Exercices d'application

Exercice 5.1 – Vérifier qu'une fonction est solution

Montrer que la fonction y proposée est solution de l'équation différentielle indiquée.

1. $y(x) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ et $y' = 5x^2 + 3x$ sur \mathbb{R} .
2. $y(x) = \frac{1}{3x^3} + 5$ et $y' = -\frac{1}{x^4}$ sur $]0; +\infty[$.
3. $y(x) = e^{2x}$ pour l'équation $y' = 2y$.
4. $y(x) = \cos x \sin x$ pour l'équation $y'' = -4y$.

Exercice 5.2 – Préciser l'intervalle

Montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur un intervalle I à préciser.

1. $y(x) = \frac{e^x}{x}$ et $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.
2. $y(x) = \sqrt{x} + \ln x$ et $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$.
3. $y(x) = \sin x + \pi$ et $f(x) = \cos x$.

Exercice 5.3 – Primitives usuelles

Déterminer une primitive sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \frac{5}{3}x^3$ sur \mathbb{R} .
2. $f(x) = -\frac{1}{x^5}$ sur $]0; +\infty[$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
4. $f(x) = \sin x$ sur \mathbb{R} .

Exercice 5.4 – Primitive de \ln

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de \ln sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer l'unique primitive de \ln qui s'annule en 1.

Exercice 5.5 – Fonctions composées et décomposition

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour $x > 1$,

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. En déduire une primitive de cette fonction sur $]1; +\infty[$.
3. Écrire $t(x) = \frac{\ln x}{x}$ sous la forme $u'(x)u(x)$ et en déduire une primitive de t sur $]0; +\infty[$.
4. En développant $h(x) = (x+1)e^x$, retrouver une forme $u'v + uv'$ et en déduire une primitive de h sur \mathbb{R} .

Exercice 5.6 – Résoudre $y' = ay$

1. Résoudre les équations différentielles

$$y' = 2y \quad \text{et} \quad y' = -5y.$$

2. Donner l'allure des fonctions $x \mapsto Ke^{-5x}$ selon le signe de K .

3. Résoudre

$$y' + \frac{1}{3}y = 0 \quad \text{puis} \quad 4y' + 5y = 0.$$

4. Déterminer l'unique solution de $4y' + 5y = 0$ telle que $f(1) = 2$.

Exercice 5.7 – Résoudre $y' = ay + b$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y + 1$;
2. $y' = -5y + 2$;
3. $y' + y = 3$;
4. $4y' + y - 5 = 0$.

Exercice 5.8 – Modélisation : fibre optique

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui sert à transmettre un signal lumineux. On modélise la puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), par une fonction g définie sur $[0; +\infty[$. On suppose que g vérifie l'équation différentielle

$$y' + 0,035y = 0.$$

On sait de plus que $g(0) = 7$.

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. Déterminer l'expression de $g(x)$.
3. Pour rester détectable, le signal doit vérifier $g(x) > 0,08$. Le signal est-il encore détecté au bout de 100 km ?

Exercice 5.9 – Solution particulière connue : $y' = y + \cos x$

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y + \cos x.$$

1. Vérifier que la fonction

$$t(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

est solution de (E) .

2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - t$ est solution de

$$(E') : y' = y.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 5.10 – Solution particulière connue : $y' = y - x^2$

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y - x^2.$$

1. Montrer que si un polynôme P est solution de (E) , alors il est du second degré.
2. Déterminer une solution particulière polynomiale de (E) .
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de l'équation $y' = y$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 5.11 – Approfondissement

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' - 3y = 2e^{1-x}$;
2. $y' + 2y = 3e^{-3x}$;
3. $y' = y + x$.

À retenir

- Une primitive de f est une fonction F telle que $F' = f$.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Pour résoudre $y' = ay$, on écrit directement $y(x) = Ke^{ax}$.
- Pour résoudre $y' = ay + b$, on cherche une solution particulière constante $-\frac{b}{a}$ puis on ajoute une solution générale de l'équation $y' = ay$.
- Les conditions initiales servent à déterminer la constante K .