

Fonctions trigonométriques

Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre introduit les fonctions trigonométriques à partir du cercle trigonométrique. On relie un nombre réel à un point du cercle, puis on définit le cosinus et le sinus comme les coordonnées de ce point. L'étude conduit ensuite aux valeurs remarquables, aux angles associés, aux courbes représentatives, à la parité et à la périodicité.

Attendus du programme

- Connaître le cercle trigonométrique, la longueur d'arc et la mesure en radian.
- Comprendre l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique et la notion de point-image d'un réel.
- Relier les coordonnées d'un point du cercle au cosinus et au sinus d'un nombre réel.
- Déterminer les valeurs remarquables et relier ces résultats au sinus et au cosinus dans un triangle rectangle.
- Lire et interpréter les courbes des fonctions cosinus et sinus; utiliser leur parité et leur périodicité.
- Découvrir un exemple d'algorithme d'approximation de π par la méthode d'Archimède.

1 Repérage sur le cercle trigonométrique

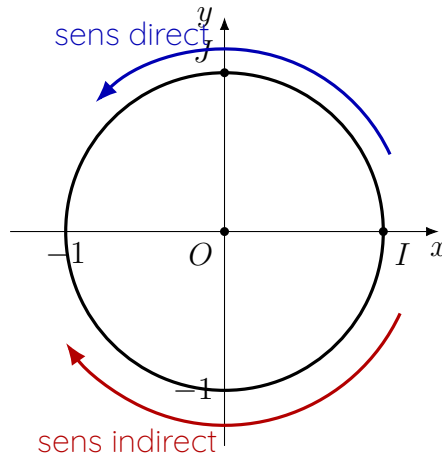
Définition 1.1: Cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\mathcal{C} = \{M \mid OM = 1\}.$$

Propriété 1.1: Orientation

Sur le cercle trigonométrique, le **sens direct** est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Le **sens indirect** est le sens des aiguilles d'une montre.



Remarque

Le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π . Cette longueur jouera un rôle essentiel pour comprendre pourquoi plusieurs réels peuvent avoir le même point-image.

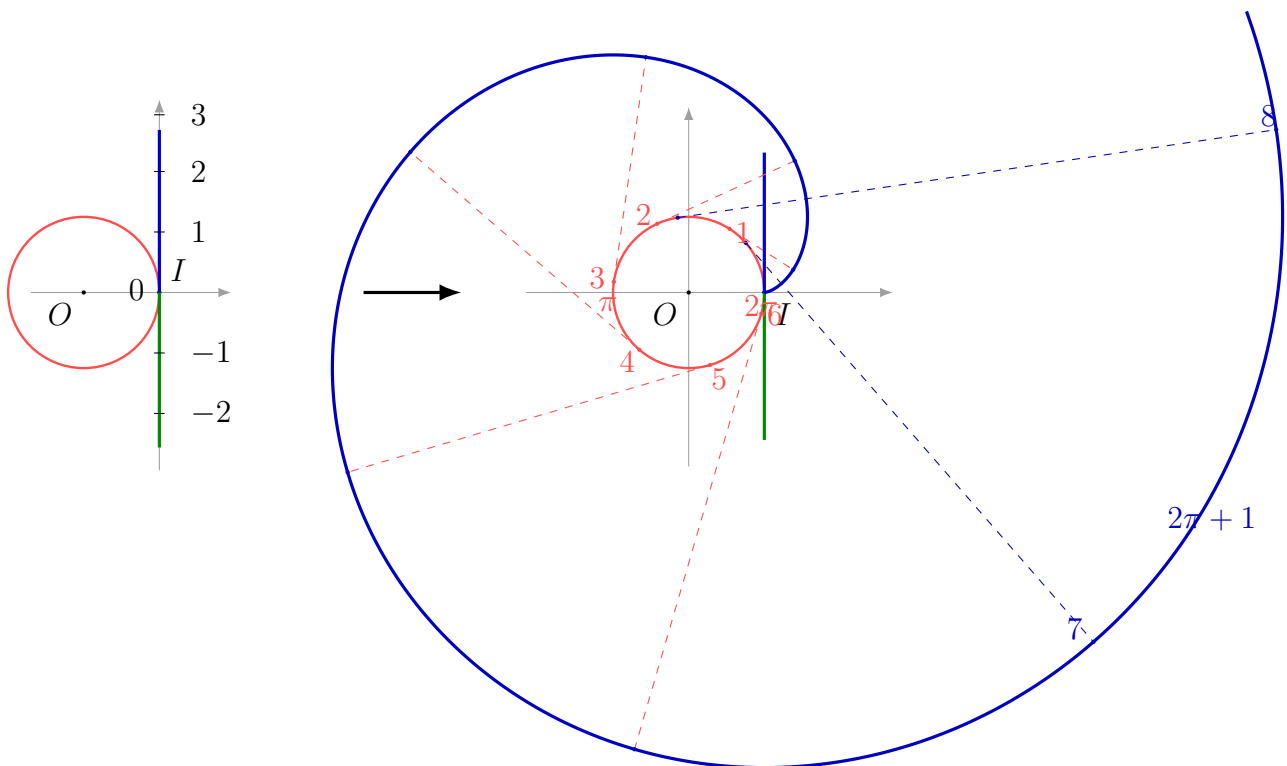
Exercice 1.1 – Repérer des points

Placer sur un cercle trigonométrique les points-images des réels $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π . Que remarque-t-on pour 0 et 2π ?

Enroulement de la droite des réels

Propriété 1.2: Point-image d'un réel

On enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique à partir du point I . À tout réel x , on associe alors un point du cercle, appelé **point-image** de x et noté M_x .



Remarque

Deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π ont le même point-image. Ainsi, pour tout entier

• $k,$

$$M_{x+2k\pi} = M_x.$$

• En particulier, $0, 2\pi, 4\pi, -2\pi$ ont tous pour image le point I .

Définition 1.2: Radian

Soit M un point du cercle trigonométrique. La mesure en radian de l'angle \widehat{IOM} est la longueur de l'arc orienté \widehat{IM} intercepté par cet angle.

Exemple

Comme le cercle trigonométrique a pour rayon 1, un tour complet correspond à une longueur d'arc égale à 2π . On obtient donc

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Angle en degrés	30°	45°	60°
Mesure en radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Exercice 1.2 – Enroulement et radian

1. Donner le point-image de $\frac{5\pi}{2}$, puis celui de $-\frac{3\pi}{2}$.
2. Convertir en radians : $30^\circ, 135^\circ, 270^\circ$.
3. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$.

2 Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

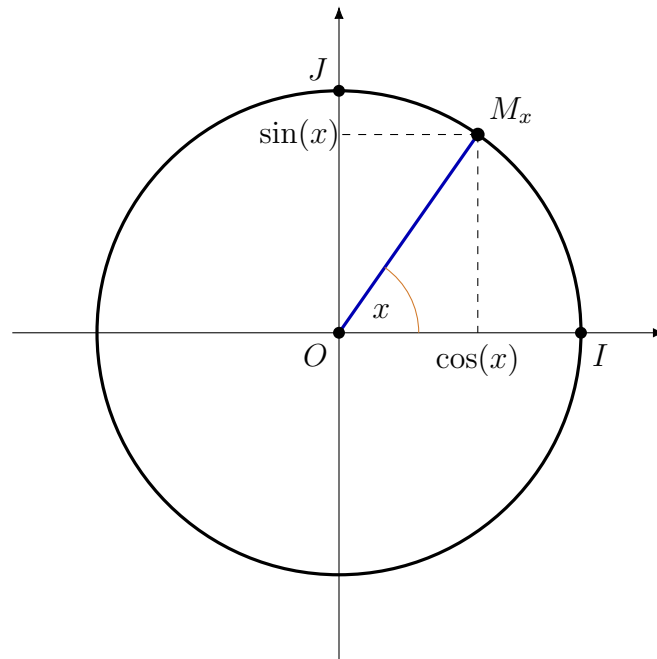
Cosinus et sinus d'un réel

Définition 2.1: Sinus et cosinus

Pour tout réel x , si M_x est le point-image de x sur le cercle trigonométrique, alors les coordonnées de M_x sont

$$M_x(\cos(x); \sin(x)).$$

Le **cosinus** de x est donc l'abscisse du point-image et le **sinus** de x est son ordonnée.



Propriété 2.1: Relation fondamentale

Pour tout réel x ,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

De plus,

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Exemple

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ces égalités se lisent directement sur le cercle trigonométrique : le point-image de 0 est $I(1; 0)$, celui de $\frac{\pi}{2}$ est $J(0; 1)$.

Exercice 2.1 – Coordonnées sur le cercle

Déterminer les coordonnées des points-images des réels suivants :

$$0, \quad \pi, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad 2\pi.$$

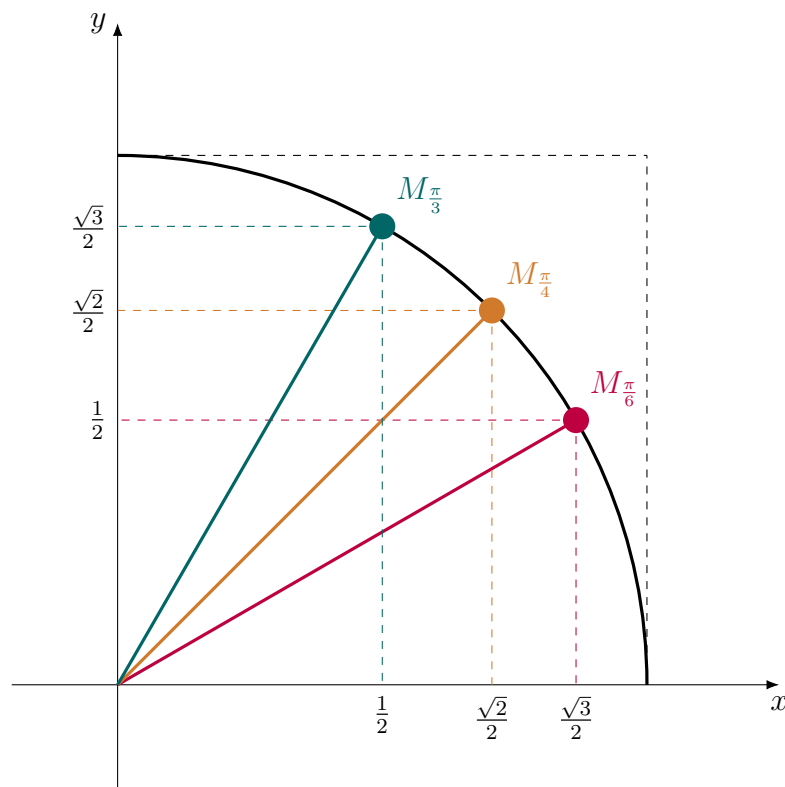
Puis vérifier dans chaque cas la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Valeurs remarquables

Propriété 2.2: Valeurs remarquables

Les principales valeurs remarquables sont données dans le tableau suivant.

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
Réel associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Remarque

- Pour retenir le tableau, on peut lire les valeurs dans le premier quart du cercle puis utiliser les symétries pour retrouver les autres cas.

Exercice 2.2 – Valeurs remarquables

Compléter sans calculatrice :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Puis ranger ces quatre nombres dans l'ordre croissant.

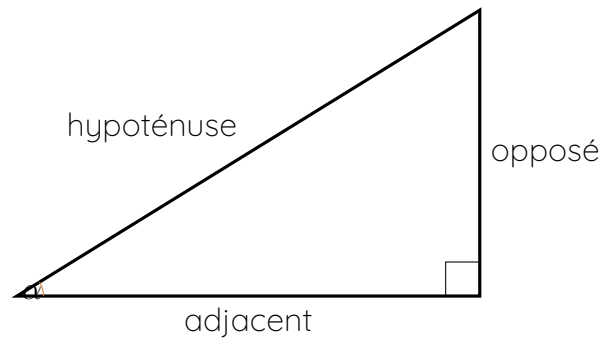
Lien avec le triangle rectangle

Propriété 2.3: Triangle rectangle

Soit α un angle aigu d'un triangle rectangle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Dans le cercle trigonométrique, lorsque l'on se place dans le premier quart de cercle, ces rapports coïncident avec les coordonnées du point-image de α .



Exemple

Dans un triangle rectangle isocèle de côté 1, l'hypoténuse vaut $\sqrt{2}$. Pour un angle aigu de 45° ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dans un triangle équilatéral de côté 2, on retrouve de même

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2.3 – Lien cercle / triangle

Dans un triangle rectangle, un angle aigu mesure 30° .

1. Donner la valeur de son sinus et de son cosinus.
2. Si l'hypoténuse mesure 10, calculer la longueur du côté opposé puis celle du côté adjacent à cet angle.

Angles associés

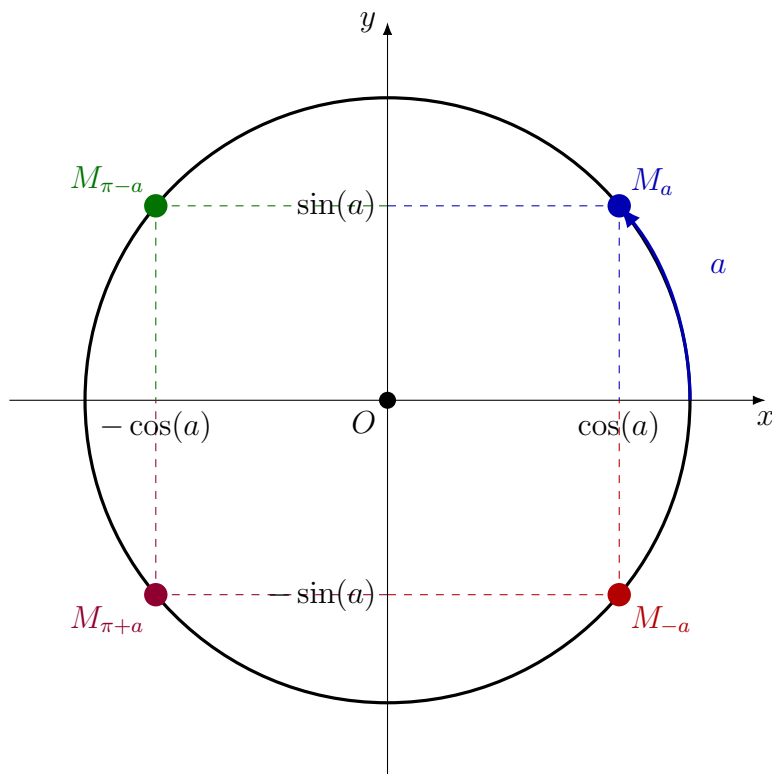
Propriété 2.4: Formules d'angles associés

Pour tout réel a ,

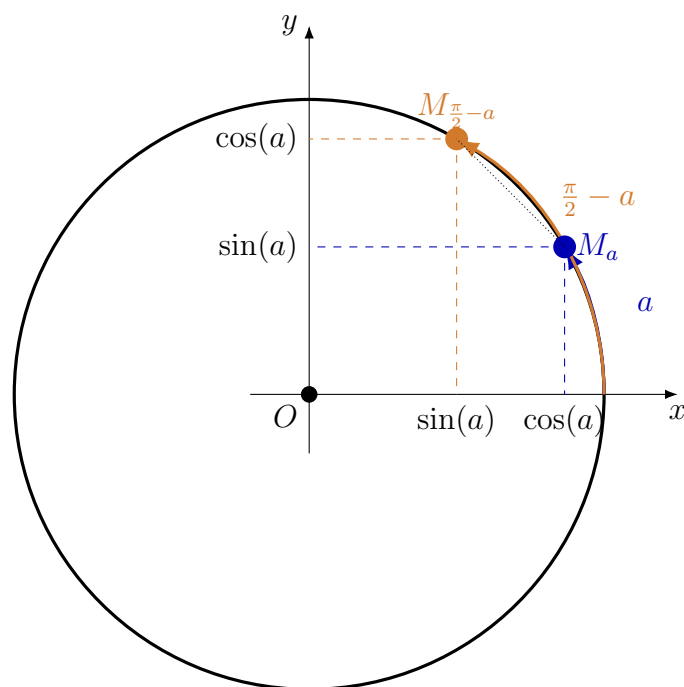
$$\begin{aligned} \cos(-a) &= \cos(a), & \sin(-a) &= -\sin(a), \\ \cos(\pi - a) &= -\cos(a), & \sin(\pi - a) &= \sin(a), \\ \cos(\pi + a) &= -\cos(a), & \sin(\pi + a) &= -\sin(a), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin(a), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos(a). \end{aligned}$$

Remarque

Ces égalités proviennent des symétries du cercle trigonométrique : symétrie par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées, à l'origine ou encore à la droite $y = x$ dans le premier quart de cercle.



Les points-images de $-a$, $\pi - a$ et $\pi + a$ se déduisent de M_a par symétries, ce qui explique directement les signes de \cos et de \sin .



Dans le premier quadrant, passer de a à $\frac{\pi}{2} - a$ échange l'abscisse et l'ordonnée : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$.

Exercice 2.4 — Utiliser les angles associés

Calculer sans calculatrice :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

3 Fonctions cosinus et sinus

Définitions et courbes représentatives

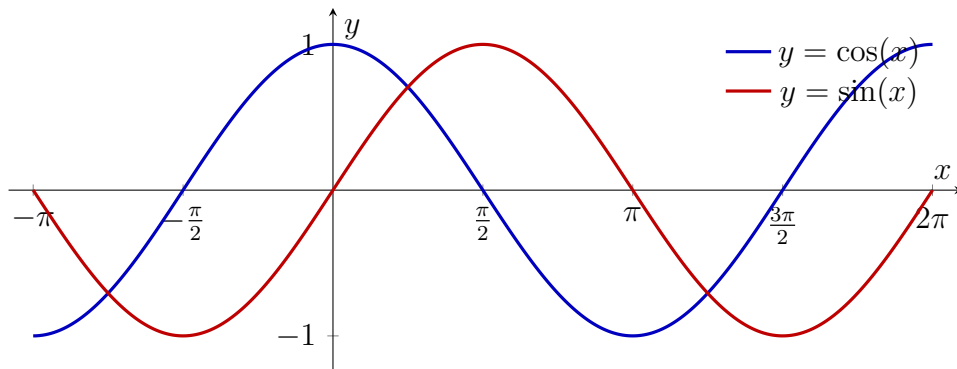
Définition 3.1: Fonctions cosinus et sinus

La **fonction cosinus** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\cos : x \mapsto \cos(x).$$

La **fonction sinus** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\sin : x \mapsto \sin(x).$$



Exemple

On lit sur les courbes :

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0.$$

Le cosinus atteint son maximum 1 en 0, tandis que le sinus s'annule en 0 puis croît jusqu'à 1 en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.1 – Lecture graphique

À partir des courbes, retrouver :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos(\pi), \quad \sin(2\pi).$$

Préciser à chaque fois si la valeur est positive, négative ou nulle.

Parité et périodicité

Propriété 3.1: Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **2π -périodiques** : pour tout réel x ,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Propriété 3.2: Parité

Pour tout réel x ,

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Ainsi, la fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Remarque

Graphiquement, la courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tandis que la courbe du sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	-1	0	1	0	-1

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	-1	0	1	0

Exercice 3.2 — Parité et périodicité

Simplifier les expressions suivantes :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right), \quad \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right), \quad \sin(-2\pi + x).$$

4 Algorithmes : approximation de π par la méthode d'Archimède

Propriété 4.1: Encadrement de π

Dans un cercle de rayon 1, le périmètre du polygone régulier inscrit à n côtés vaut

$$P_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Comme ce périmètre est inférieur à celui du cercle, on obtient

$$P_n < 2\pi \quad \text{soit encore} \quad n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi.$$

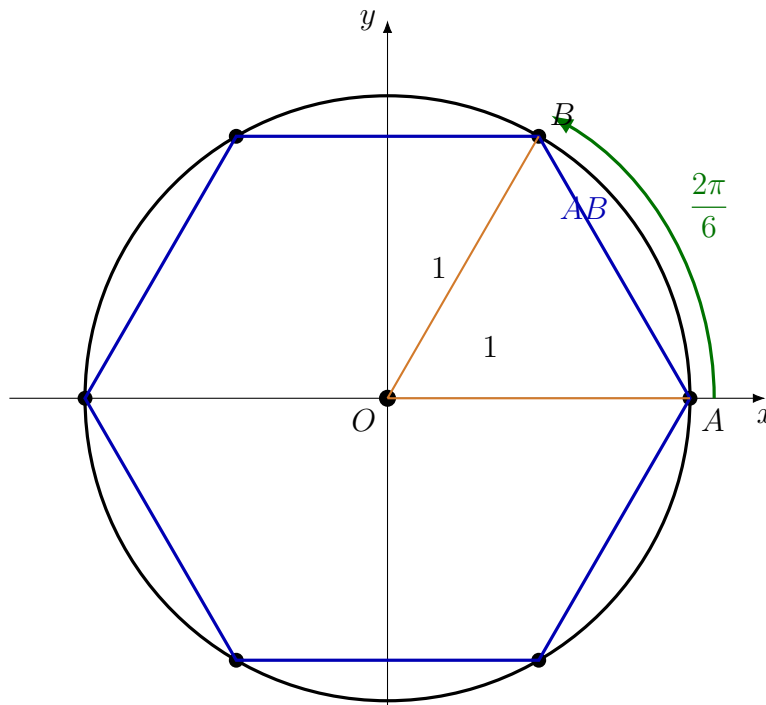
En augmentant le nombre de côtés, l'approximation devient meilleure : c'est l'idée de la méthode d'Archimède.

Exemple

Avec un hexagone inscrit, on trouve

$$\pi > 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$$

Avec un polygone à 96 côtés, l'approximation est déjà très fine.



Hexagone régulier inscrit dans le cercle unité

Exemple d'algorithme en Python

```
from math import sin, pi

for n in [6, 12, 24, 48, 96]:
    approximation = n * sin(pi / n)
    print(n, approximation)
```

Cet algorithme affiche des valeurs approchées inférieures à π . Plus n est grand, plus le polygone épouse le cercle, donc meilleure est l'approximation.

Exercice 4.1 – Algorithme d'Archimède

1. Calculer à la main l'approximation obtenue pour $n = 6$.
2. Expliquer pourquoi l'approximation est inférieure à π .
3. Recopier puis exécuter l'algorithme. Quelle approximation obtient-on pour $n = 96$?

Bilan

Pour étudier les fonctions trigonométriques, on part du cercle trigonométrique. Un réel x y détermine un point-image M_x , dont les coordonnées sont $(\cos(x); \sin(x))$. Les valeurs remarquables, les angles associés, la parité et la périodicité permettent ensuite de calculer efficacement et de lire les courbes représentatives.