

Fonction logarithme népérien

Introduction

Objectifs du chapitre

- Comprendre la **définition** de la fonction logarithme népérien comme **fonction inverse** de l'exponentielle.
- Maîtriser les **propriétés fondamentales** : $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$) et $\ln(e^x) = x$.
- Utiliser les **propriétés algébriques** : $\ln(ab)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, $\ln(a^n)$.
- Étudier une fonction faisant intervenir \ln : **dérivation, variations, limites**.
- Résoudre des **équations** et **inéquations** avec \ln et e^x .

Pré-requis

- Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$: continuité, croissance, $e^{x+y} = e^x e^y$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- Dérivation : dérivées usuelles, dérivée d'une composée.

1 Du problème $e^y = x$ à la définition de \ln

Remarque

- La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur \mathbb{R} . Elle prend toutes les valeurs de $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x > 0$, l'équation $e^y = x$ admet une **unique** solution réelle y .

Définition 1.1: Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\ln(x) = y \iff e^y = x.$$

Autrement dit, $\ln(x)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut x .

Propriété 1.1: Fonctions réciproques

Pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

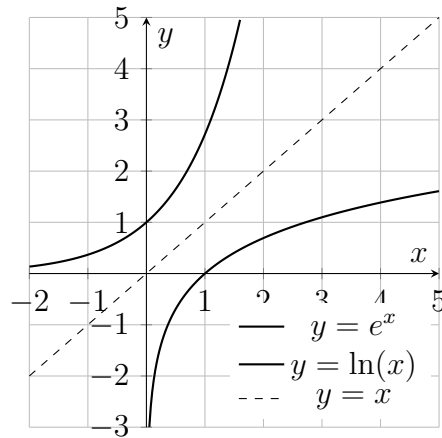
Exemple

$\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$. $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$. $\ln(e^3) = 3$.

Représentation graphique et symétrie

Propriété 1.2: Symétrie des courbes

Dans un repère orthonormé, la courbe de $y = \ln(x)$ est l'image de la courbe de $y = e^x$ par la symétrie d'axe $y = x$.



2 Variations, signe et limites de \ln

Propriété 2.1: Sens de variation

La fonction \ln est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Propriété 2.2: Signe

Pour tout $x > 0$:

$$\ln(x) > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$

Propriété 2.3: Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Tableau de variations

x	0^+	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3 Propriétés algébriques

Propriété 3.1: Produit

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Propriété 3.2: Inverse et quotient

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

Propriété 3.3: Puissance et racine

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n :

$$\ln(a^n) = n \ln(a).$$

En particulier :

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a).$$

Exemple • $\ln(30) = \ln(2 \times 3 \times 5) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 5$.

• $\ln(25) = \ln(5^2) = 2 \ln 5$.

• $\ln(10) - \ln(20) = \ln\left(\frac{10}{20}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

4 Dérivation et tangentes

Propriété 4.1: Dérivée de \ln

La fonction \ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Propriété 4.2: Dérivée de $\ln(u)$

Soit u dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et :

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple

Sur \mathbb{R} , $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$ vérifie :

$$f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}.$$

Tangente en $x = 1$ et inégalité classique

Propriété 4.3: Tangente en 1

La tangente à la courbe de $y = \ln(x)$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

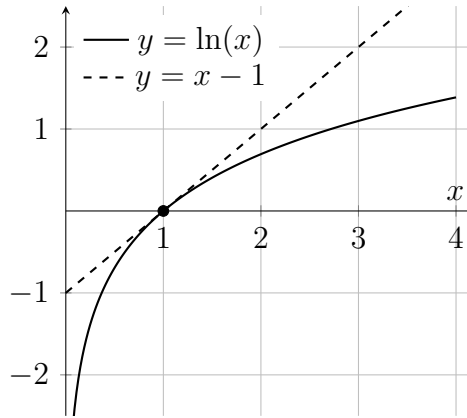
$$y = x - 1.$$

Théorème 4.1: Inégalité $\ln(x) \leq x - 1$

Pour tout $x > 0$,

$$\ln(x) \leq x - 1,$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$. Ainsi, la courbe de \ln est **en dessous** de sa tangente en 1.



5 Croissance comparée (idées à retenir)

Propriété 5.1: À l'infini

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

Propriété 5.2: Au voisinage de 0

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$$

6 Méthodes et exercices

Méthode 1 — Résoudre une équation/inéquation avec \ln ou e^x

- **Étape 1** : déterminer les **conditions d'existence** (par exemple $u(x) > 0$ si $\ln(u(x))$ apparaît).
- **Étape 2** : isoler $\ln(\cdot)$ ou $e^{(\cdot)}$.
- **Étape 3** : appliquer la fonction réciproque : $\ln(u) = a \iff u = e^a$; $e^u = b \iff u = \ln(b)$ (avec $b > 0$).
- **Étape 4** : vérifier l'appartenance des solutions aux conditions d'existence.

Exercice 6.1 — Équations de base

Compétences : résoudre une équation avec \ln et e^x .

Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $\ln(x) = 5$.
2. $e^{2x} = 3$.
3. $\ln(1 - x) \leq -1$.

Méthode 2 — Comparer des logarithmes

Comme \ln est **croissante** sur $]0, +\infty[$,

$$\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v \quad \text{à condition que } u > 0 \text{ et } v > 0.$$

Exercice 6.2 – Équation $\ln(u) = \ln(v)$

Compétences : conditions d'existence, résolution d'une équation.

Résoudre $\ln(4x - 1) = \ln(2 - x)$.

Exercice 6.3 – Calculs avec les propriétés

Compétences : utiliser $\ln(ab)$, $\ln(a^n)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Exprimer en fonction de $\ln 2$:

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right), \quad \ln(8) + 5 \ln(2), \quad \ln(\sqrt{32}), \quad \ln(10) - \ln(20).$$

Exercice 6.4 – Inconnue en exposant

Compétences : appliquer \ln et gérer le sens de l'inégalité.

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$.

Pour aller plus loin**Exercice 6.5** – Étude de fonction

Compétences : dériver et étudier des variations avec \ln .

Soit $f(x) = x^2 - x - \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f .