Chapitre 10 19 mai 2026

Compléments sur la dérivation et convexité

Introduction

Objectifs du chapitre

- **Déterminer** l'image d'un nombre par une **fonction composée**.
- **Calculer** la dérivée d'une fonction composée et **étudier ses variations**.
- **Étudier** la **convexité** d'une fonction (lecture graphique, dérivées).
- **Déterminer** les coordonnées d'un **point d'inflexion**.

Point histoire (culture)

La **convexité** est d'abord une notion géométrique : on compare une courbe à ses **sécantes** et à ses **tangentes**. À partir du XIXe siècle, l'analyse formalise ces idées et relie la forme de la courbe au signe de la **dérivée seconde**.

1 Fonctions composées

Définition 1.1: Composition de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions. On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)).$$

Pour que $v \circ u$ soit définie en x, il faut que $u(x)$ appartienne à l'ensemble de définition de v.

Exemple

On définit $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $v \circ u$ est définie lorsque $2x - 3 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq \frac{3}{2}$, et

$$(v \circ u)(x) = \sqrt{2x - 3}.$$

En revanche, $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u \circ v)(x) = 2\sqrt{x} - 3$.

Propriété 1.1: Associativité de la composition

La composition est **associative** : si u, v et w sont trois fonctions (définies de façon compatible), alors

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u.$$

Propriété 1.2: Non-commutativité

En général, $v \circ u \neq u \circ v$.

Propriété 1.3: Monotonie d'une fonction composée

Soient u et v deux fonctions telles que $v \circ u$ soit définie sur un intervalle I.

- Si u et v sont de **même monotonie** (toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors $v \circ u$ est **croissante** sur I.
- Si u et v sont de **monotonie contraire**, alors $v \circ u$ est **décroissante** sur I.

2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 2.1: Formule de dérivation (chaîne)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J, telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x)\, v'(u(x)).$$

Démonstration (idée).
Pour $h \neq 0$:

$$\frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{h} = \underbrace{\frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)}}_{\text{taux d'accroissement de } v} \times \underbrace{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{\text{taux d'accroissement de } u}.$$

Quand $h \to 0$, le second facteur tend vers $u'(x)$. De plus, comme $u(x+h) \to u(x)$, le premier facteur tend vers $v'(u(x))$. D'où $(v \circ u)'(x) = u'(x)\, v'(u(x))$.

Quelques cas particuliers utiles

Propriété 2.1: Formules à connaître

Soit u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}^*$.

- $(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$.
- $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n\, u'}{u^{n+1}}$.
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (lorsque $u > 0$).

Propriété 2.2: Cas affine

Si $f(x) = u(ax+b)$ avec a et b réels et u dérivable, alors

$$f'(x) = a\, u'(ax+b).$$

Exemple
Soit $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$; alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc

$$f'(x) = 2x\, \mathrm{e}^{x^2+1}.$$

Exemple
Soit $g(x) = \sqrt{2x+6}$ définie sur $]-3; +\infty[$. On pose $u(x) = 2x+6$ et $v(x) = \sqrt{x}$; alors $u'(x) = 2$ et

$v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc, pour $x > -3$,

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}.$$

3 Convexité et concavité

Interprétation graphique

Définition 3.1: Fonction convexe / concave

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- f est **convexe** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en dessous** du segment $[AB]$.
- f est **concave** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** du segment $[AB]$.

Exemple· La fonction $x \mapsto x^2$ est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est **concave** sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.

Propriété 3.1: Lien avec les tangentes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- f est **convexe** sur I si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus de ses tangentes** sur I.
- f est **concave** sur I si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est **en dessous de ses tangentes** sur I.

Inégalités de convexité

Propriété 3.2: Inégalités

Si f est convexe sur un intervalle I, alors pour tous $x, y \in I$ et tout $t \in [0; 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si f est concave sur I, l'inégalité est **renversée**.

Justification (géométrique).
On considère $A(x; f(x))$ et $B(y; f(y))$ sur $\mathcal{C}_f$. Soit M le point du segment $[AB]$ d'abscisse $tx+(1-t)y$. Alors l'ordonnée de M vaut $tf(x) + (1-t)f(y)$ (barycentre sur un segment). Si f est convexe, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous du segment $[AB]$: donc l'ordonnée de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $tx+(1-t)y$ est inférieure (ou égale) à celle de M, d'où l'inégalité.

Remarque
Si les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq y$ et $t \in]0; 1[$, on dit que f est **strictement convexe** (ou strictement concave).

4 Dérivée seconde et critères de convexité

Définition 4.1: Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur I telle que f' soit elle aussi dérivable sur I. On appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de f', notée f''.

Théorème 4.1: Caractérisation par f' et f''

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff f'' \geq 0$ sur I.
- f est **concave** sur $I \iff f'$ est décroissante sur $I \iff f'' \leq 0$ sur I.

Idée de preuve (f" $\geq 0 \Rightarrow$ convexité).
Si $f'' \geq 0$ sur I, alors f' est croissante sur I. Fixons $a \in I$ et considérons la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - \big(f'(a)(x-a) + f(a)\big).$$

Alors $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$, donc $\varphi'(x) \geq 0$ pour $x \geq a$ et $\varphi'(x) \leq 0$ pour $x \leq a$. On en déduit que φ admet un minimum en a, donc $\varphi(x) \geq 0$ sur I : la courbe est au-dessus de la tangente en a, ce qui caractérise la convexité.

Exemple
Soit $f(x) = \mathrm{e}^{2x+5} - 4x$ définie sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+5} - 4$ et

$$f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x+5} > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donc f est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

Remarque
La dérivée seconde d'une fonction affine est nulle sur son intervalle de définition.

5 Point d'inflexion

Définition 5.1: Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Un point $A(a; f(a))$ de $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion** si, en a, la courbe $\mathcal{C}_f$ **traverse** sa tangente.

Propriété 5.1: Changement de convexité

Si $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion, alors f **change de convexité** au voisinage de a (convexe puis concave, ou l'inverse).

Propriété 5.2: Critère avec f''

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si

$$f''(a) = 0 \quad \text{et} \quad f'' \text{ change de signe en } a.$$

Remarque
La condition $f''(a) = 0$ seule **ne suffit pas** : il faut bien un **changement de signe** de f''.

Exemple
La fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f''(x) = 6x$. Comme $f''(0) = 0$ et que f'' change de signe en 0, le point $A(0; 0)$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.

Méthode (recommandée) Pour étudier la convexité et repérer les points d'inflexion :

1. calculer f'' et déterminer son **signe** sur l'intervalle d'étude ;
2. en déduire les intervalles de **convexité/concavité** ;
3. repérer les a tels que $f''(a) = 0$ avec **changement de signe** : ce sont les abscisses des **points d'inflexion**.

Exercice 1 — Schéma de composition

Établir le schéma de composition de la fonction f définie par $f(x) = (x+2)^3$.

Exercice 2 — Schéma de composition

Établir le schéma de composition de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$.

Exercice 3 — Composition

On considère deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = 3x + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Déterminer $(f \circ g)(6)$.

Exercice 4 — Composition

Avec les tableaux ci-dessous, déterminer $(f \circ g)(1)$.

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Exercice 5 — Dérivation

Déterminer la fonction dérivée notée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-x+1)e^{3x}.$$

Exercice 6 — Dérivation

Déterminer la fonction dérivée notée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin(x^2 + 1).$$

Exercice 7 — Variations

Étudier et dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{2 + \cos(x)}.$$

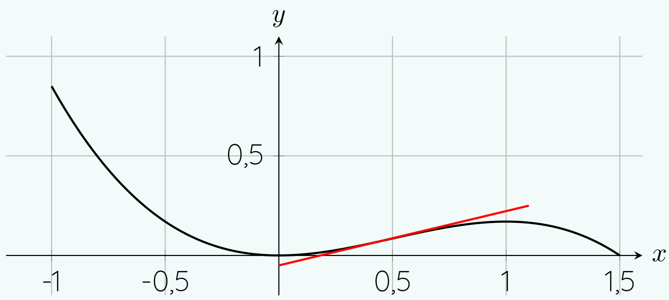
Exercice 8 — Variations

Même question que précédemment avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{-x^2}.$$

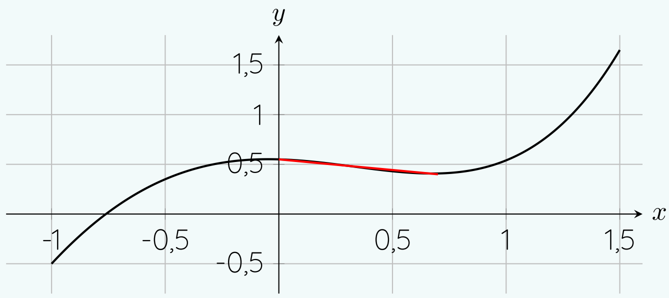
Exercice 9 — Convexité/Concavité

À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



Exercice 10 — Convexité/Concavité

À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



Exercice 11 — Inégalité – concavité

En utilisant la concavité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, montrer que si a et b sont strictement positifs alors

$$\sqrt{a+b} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Exercice 12 — Inégalité – convexité

En utilisant la convexité de la fonction cube sur $\mathbb{R}_+$, montrer que si a et b sont strictement positifs alors

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3).$$

Exercice 13 — Convexité

Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f'	$\cdots$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$\cdots$

Exercice 15 — Convexité

Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

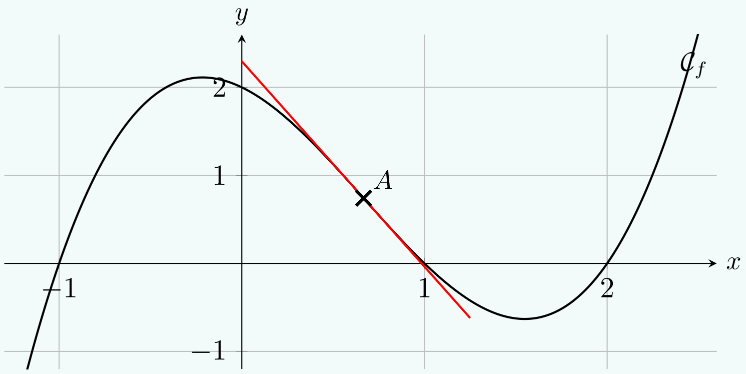
Exercice 16 — Convexité

Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - 3e^{x+2}.$$

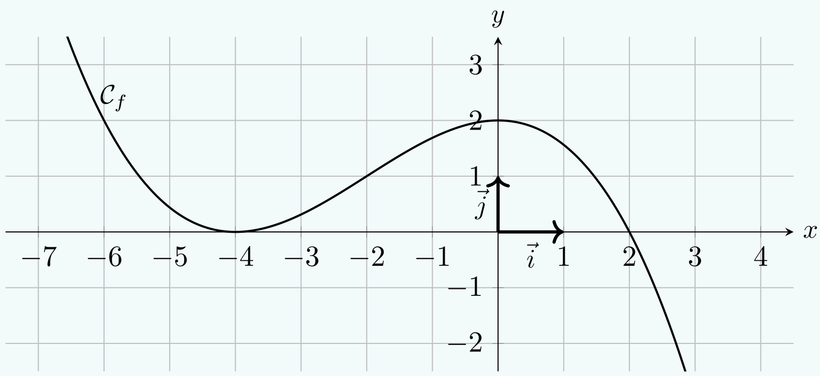
Exercice 17 — Point(s) d'inflexion

Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



Exercice 18 — Point(s) d'inflexion

Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



Exercice 19 — Point(s) d'inflexion

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 20 — Point(s) d'inflexion

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 23 — Modélisation – croissance

On modélise le rythme de croissance d'un PIB (en milliards) par la dérivée de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x}{e^x}.$$

où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020. Déterminer le moment où la croissance commence à ralentir.

Exercice 69 — Démonstration – convexité

En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que, pour tout réel x,

$$1+x \leq e^x.$$

Exercice 70 — Démonstration – concavité

En utilisant la concavité de la fonction racine carrée, montrer que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1).$$

Exercice 115 — Convexité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,e^{x^2-1}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(2x^2+1\right)e^{x^2-1}.$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)e^{x^2-1}.$$

   (b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - f(x)$.

   (a) Montrer que $h(x) = x\left(1-e^{x^2-1}\right)$.

   (b) On admet que l'inéquation $1-e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1;1]$. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1;1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur $[-1;1]$.

D'après Centres Étrangers 2014.

Exercice 116 — Tangente et convexité

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1.$$

1. Calculer $f''(x)$.
2. Montrer que
$$f''(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4).$$
3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire l'étude complète de la convexité de f (convexité, concavité, points d'inflexion).
4. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.