

Continuité des fonctions

Introduction

Objectifs du chapitre

- **Définir** la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle.
- **Justifier** qu'une fonction est continue à l'aide des fonctions usuelles et des opérations (somme, produit, quotient, composition).
- **Relier** continuité et dérivabilité : « dérivable \Rightarrow continue ».
- **Utiliser la continuité** pour :
 - déterminer la limite d'une suite récurrente convergente (théorème du point fixe);
 - montrer l'existence (et parfois l'unicité) de solutions d'équations (TVI, bijection).

La continuité prolonge naturellement la notion de **limite** étudiée au chapitre précédent : elle formalise l'idée qu'au voisinage d'un réel a , la fonction ne présente pas de « saut » et que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Commentaires pédagogiques

La continuité joue un rôle central en analyse :

- elle permet de **passer à la limite** dans une expression $f(u_n)$ lorsque (u_n) converge;
- elle garantit l'**existence** de solutions d'une équation $f(x) = k$ lorsque k est « entre » $f(a)$ et $f(b)$;
- associée à la **monotonie**, elle assure l'**unicité** de la solution.

Point histoire (culture)

Pendant longtemps, l'idée de continuité a été utilisée de manière intuitive. Le **théorème des valeurs intermédiaires** apparaît déjà au XVI^e siècle, mais c'est au XIX^e siècle que la notion est véritablement formalisée (Bolzano, Cauchy, puis Weierstrass), avec une définition fondée sur les limites.

1 Définition et propriétés

Continuité en un point

Définition 1.1: Continuité en un réel a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a .
On dit que f est **continue en a** si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Remarque. Cette définition suppose que $f(a)$ existe (donc que $a \in D_f$).

- Le cadre de la définition exige que la fonction f soit définie en a , on ne parle donc pas de continuité de f en un point qui n'appartient pas à son ensemble de définition
- Si f est définie en a , il suffit de prouver que la limite de f en a existe et est finie pour dire que f est continue en a . Dans ce cas la limite vaut obligatoirement $f(a)$.

Continuité sur un intervalle

Propriété 1.1: Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .
La fonction f est **continue sur I** si et seulement si elle est continue en tout réel $a \in I$.

Remarque

Pour un intervalle fermé $[a; b]$:

$$f \text{ est continue sur } [a; b] \text{ si } \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a; b[, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Pour les intervalles semi-ouverts on adapte la définition.

Continuité des fonctions usuelles et stabilité

Propriété 1.2: Fonctions usuelles continues sur leur domaine

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier :

- les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont continues sur \mathbb{R} ;
- la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* ;
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$;
- la valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} ;
- l'exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur \mathbb{R} ;
- \sin et \cos sont continues sur \mathbb{R} .

Propriété 1.3: Stabilité par opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.

- $f + g$ est continue sur I ;

- $k \cdot f$ est continue sur I ;
- $f \cdot g$ est continue sur I ;
- si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Propriété 1.4: Stabilité par composition

Soient g et h deux fonctions telles que g est continue sur I , h est continue sur J , et $g(I) \subset J$. Alors la fonction composée $h \circ g$ est continue sur I .

Remarque

En particulier, les **polynômes** sont continus sur \mathbb{R} et les **fonctions rationnelles** sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$$

est continue sur \mathbb{R} (somme, composition de fonctions continues).

Un exemple classique de discontinuité : la partie entière

Définition 1.2: Fonction partie entière

La fonction **partie entière**, notée $[x]$ (ou $E(x)$), associe à tout réel x le plus grand entier relatif n tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

Propriété 1.5: Discontinuité de la partie entière

La fonction partie entière est **discontinue** en tout entier relatif.

Méthode : montrer qu'une fonction est continue

Stratégie (très utilisée en Terminale) :

1. Sur un intervalle où l'expression de f est une **combinaison de fonctions usuelles**, conclure directement : f est continue sur cet intervalle.
2. Aux points où la définition **change** (fonction définie par morceaux), calculer :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \quad \text{et } f(a),$$

puis comparer.

3. Conclure : f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

Exemple

Fonction définie par morceaux Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{x-4}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- Chaque expression est continue sur son domaine (polynôme; rationnelle).
- Il suffit donc d'étudier la continuité en 1 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{1-4}{1} = -3, \quad f(1) = -3.$$

- On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f = f(1)$, donc f est continue en 1, et ainsi continue sur \mathbb{R} .

2 Continuité et dérivabilité

Théorème 2.1: Dérivable \Rightarrow continue

Si une fonction f est dérivable en un réel a , alors f est continue en a .
En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur I .

Démonstration (niveau attendu).

Soit f une fonction dérivable en a et $t(x)$ son taux d'accroissement en a .

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \neq a)$$

En isolant $f(x)$ on trouve a pour $x \neq a$:

$$f(x) = f(a) + (x - a)t(x).$$

Quand $x \rightarrow a$ et $x < a$, on a $(x - a) \rightarrow 0$ et $t(x) \rightarrow f'(a)$, donc par produit et somme des limites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a).$$

Quand $x \rightarrow a$ et $x > a$, on a $(x - a) \rightarrow 0$ et $t(x) \rightarrow f'(a)$, donc par produit et somme des limites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a).$$

ce qui prouve la continuité de f en a .

Remarque

La réciproque est fautive : une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a .

Exemple

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} , mais elle n'est pas dérivable en 0 (point anguleux).

3 Continuité et suites

Interversion limite / fonction continue

Théorème 3.1: Interversion limite / fonction (admis)

Soit (u_n) une suite à valeurs dans un intervalle I telle que $u_n \rightarrow \ell \in I$. Soit f une fonction **continue** sur I .

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

Théorème du point fixe

Théorème 3.2: Point fixe (suite récurrente)

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et supposée convergente vers ℓ . Si f est **continue** en ℓ , alors ℓ vérifie l'équation

$$f(\ell) = \ell.$$

Démonstration.

Comme $u_n \rightarrow \ell$ et f est continue en ℓ , on a par interversion limite / fonction :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. On obtient bien $f(\ell) = \ell$.

Remarque

En pratique, comme la limite ℓ n'est pas connue, on vérifie la continuité de f sur un intervalle I contenant tous les termes u_n .

Exemple

On admet que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$$

est croissante et convergente vers ℓ .

La fonction $f(x) = 2x(1 - x)$ est polynomiale donc continue sur \mathbb{R} . Par le théorème du point fixe, ℓ vérifie :

$$\ell = 2\ell(1 - \ell) \iff 2\ell - 2\ell^2 = \ell \iff \ell(1 - 2\ell) = 0.$$

Donc $\ell \in \{0; \frac{1}{2}\}$. Comme $u_0 > 0$, la limite compatible est $\ell = \frac{1}{2}$.

Méthode : déterminer la limite d'une suite définie par récurrence

Si l'on sait (ou si l'on admet) que (u_n) converge vers ℓ :

1. écrire $u_{n+1} = f(u_n)$;
2. préciser un intervalle I contenant les termes de la suite, et vérifier que f est continue sur I ;
3. résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$;
4. choisir la solution compatible avec les informations sur la suite (signe, encadrements, monotonie, etc.).

4 Continuité et équations

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème 4.1: Valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c \in [a; b]$.

Remarque

Le TVI garantit **l'existence** d'une solution, mais pas l'unicité : une équation $f(x) = k$ peut admettre plusieurs solutions.

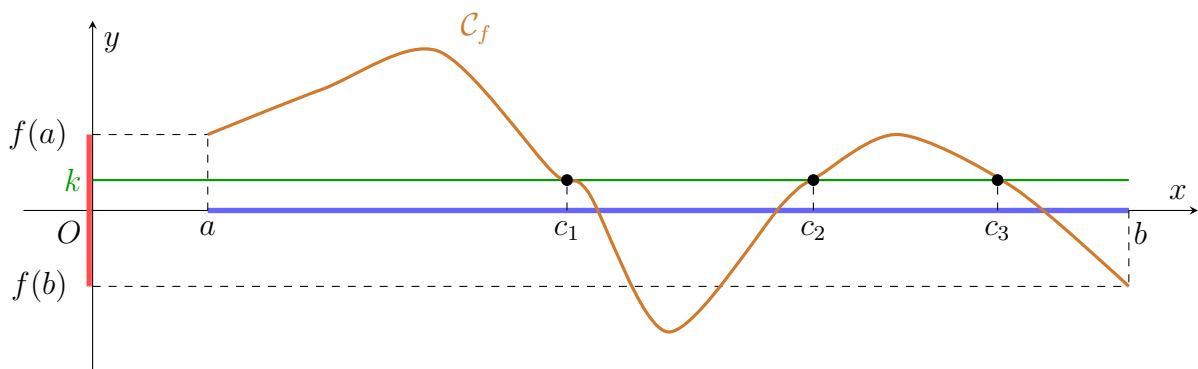


Figure 1 - Illustration du TVI : pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$ (ici, c_1, c_2, c_3).

Théorème de la bijection

Théorème 4.2: Bijection (continuité + monotonie)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution $c \in [a; b]$.

Remarque

Remarques.

- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $I =]a; b[$ où a et b peuvent être réels, ou $\pm\infty$; k doit alors être compris entre $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
- Lorsque $k = 0$, il suffira de montrer que la fonction f change de signe sur I .
- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction f n'admet qu'un et un seul antécédent.
- Un tableau de variations suffit pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction. Les flèches « montantes » ou « descendantes » indiquent la continuité et la monotonie qui doivent être listées comme hypothèses dans la rédaction de la démonstration.

Exemple

Une équation admet une unique solution L'équation $x^3 = 20$ admet une unique solution réelle car la fonction cube $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

Méthode : existence et nombre de solutions

Étapes classiques pour étudier $f(x) = k$ sur un intervalle :

1. vérifier que f est **continue** sur l'intervalle;
2. encadrer k entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou montrer un changement de signe si $k = 0$) \Rightarrow **existence** (TVI);
3. si l'on sait que f est **strictement monotone** sur l'intervalle \Rightarrow **unicité** (bijection);
4. si l'on cherche **le nombre** de solutions : découper le domaine selon les variations de f .

Méthode : utiliser une fonction auxiliaire (pour les variations)

Parfois, $f'(x)$ s'écrit sous la forme

$$f'(x) = A(x)g(x),$$

avec $A(x) > 0$ sur l'intervalle étudié. Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, et l'étude des variations de f se ramène à celle de g .

Conseil. Pour montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution, on utilise souvent le théorème de la bijection : g continue + strictement monotone + changement de signe.

Exercices

Exercice 1 – Fonction auxiliaire Ex 57

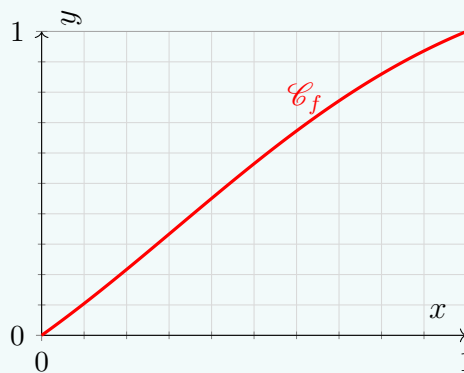
A. Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

B. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

On donne ci-dessous la courbe (\mathcal{C}_f) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal. On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a) Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$: $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (\mathcal{C}_f) sur $[0 ; 1]$.



C. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 — Fonction et suite (1) Ex 56

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution.
Donner la valeur exacte de α puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.
 - La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (S_n) par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
 - Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 — Équation (E) et continuité Ex 58

Soit l'équation : (E) : $2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4 = \pi\sqrt{x}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de (E) et de déterminer une approximation de chacune des solutions.

- On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = x\sqrt{x} - 1$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α que l'on déterminera.
 - Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.
- Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$.
 - Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$.
 - En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- Montrer que l'équation (E) est équivalente à $f(x) = \pi$ pour $x \neq 0$.
 - Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).
 - Donner un encadrement à 10^{-2} de la ou les solutions de (E).

Exercice 4 — Fonction auxiliaire (2) Ex 60

A. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$.

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- Montrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 .
- On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} . Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g .
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
- En déduire le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .
- À l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

B. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$.

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur \mathbb{R} .

2. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x , $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$.