

Limites de fonctions

Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est consacré à l'étude des limites de fonctions, une notion fondamentale en analyse mathématique. Il permet de décrire le comportement d'une fonction lorsque la variable tend vers une valeur finie ou vers l'infini.

Nous étudierons d'abord les limites en l'infini (limites finies et infinies) et les asymptotes horizontales. Ensuite, nous aborderons les limites en un point réel (limites finies et infinies) et les asymptotes verticales. Nous verrons également les opérations sur les limites, les théorèmes de comparaison et d'encadrement, ainsi que les croissances comparées entre la fonction exponentielle et les fonctions puissances.

Capacités

- Déterminer graphiquement et par le calcul la limite d'une fonction en l'infini ou en un point
- Reconnaître et déterminer les équations d'asymptotes horizontales et verticales
- Utiliser les opérations sur les limites (somme, produit, quotient)
- Lever des formes indéterminées par factorisation, par conjugué ou par comparaison
- Appliquer les théorèmes de comparaison et d'encadrement (théorème des gendarmes)
- Utiliser les croissances comparées pour lever des formes indéterminées avec l'exponentielle
- Déterminer la limite d'une fonction composée

Le bulletin officiel de l'éducation nationale

En terminale, l'étude des limites de fonctions constitue un approfondissement des notions vues en première. L'objectif est de fournir aux élèves des outils pour analyser le comportement asymptotique des fonctions et pour lever des formes indéterminées.

Les élèves doivent être capables de :

- **Déterminer des limites** à l'aide des opérations sur les limites et des théorèmes de comparaison
- **Reconnaître et interpréter** des asymptotes horizontales et verticales
- **Lever des formes indéterminées** courantes (quotient, différence, produit)
- **Utiliser les croissances comparées** entre l'exponentielle et les polynômes
- **Étudier des fonctions** définies par des expressions comportant des exponentielles

L'étude des limites est essentielle pour la compréhension de la continuité et de la dérivation, ainsi que pour l'étude complète des fonctions.

Démonstrations

- Preuve de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Preuve des croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- Preuve de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ à l'aide du taux d'accroissement

1 Limite d'une fonction en l'infini

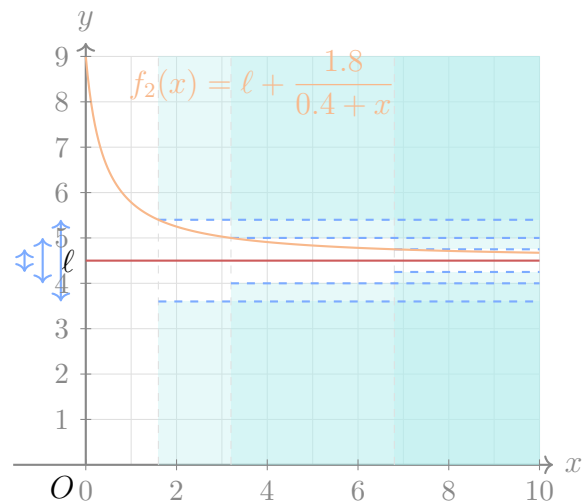
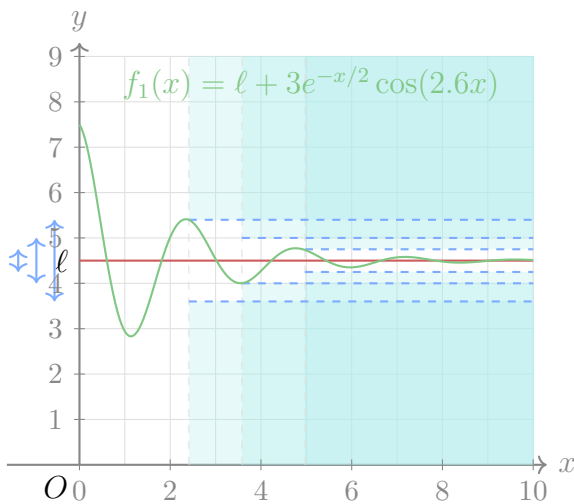
Limite finie en l'infini

Définition 1.1: Limite finie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$. On dit que f tend vers le réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

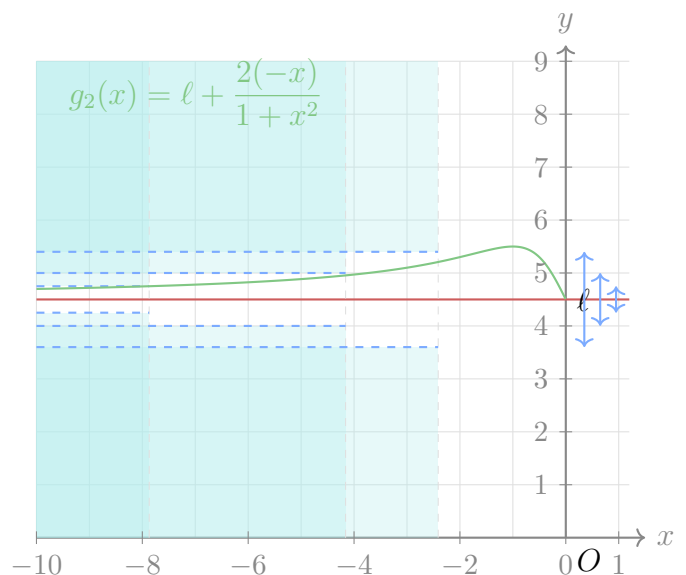
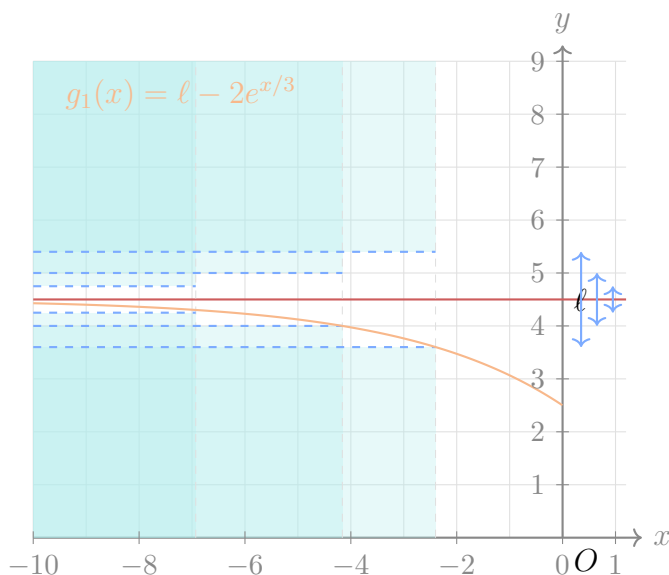


Définition 1.2: Limite finie en $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty; a]$. On dit que f tend vers le réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment petit.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$



Asymptote horizontale

Définition 1.3: Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

De même, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Limite infinie en l'infini

Définition 1.4: Limite $+\infty$ en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

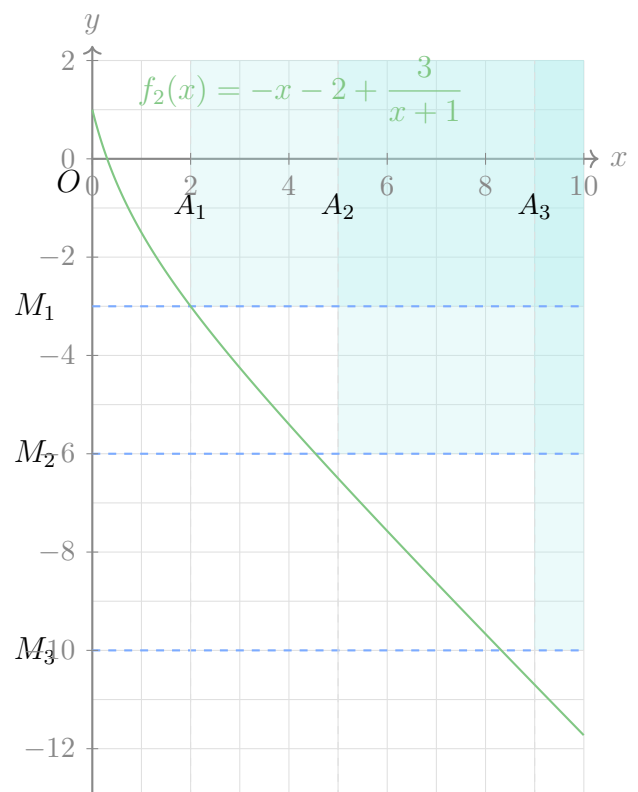
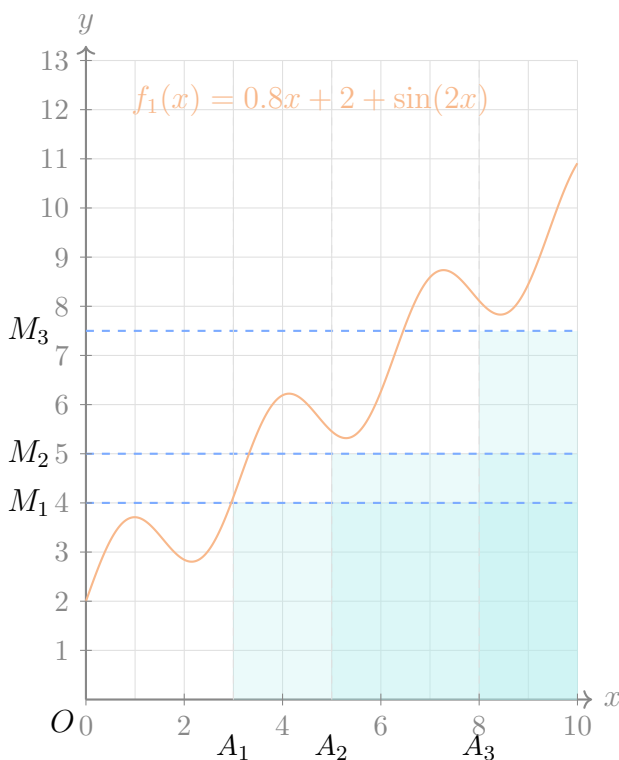
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Définition 1.5: Limite $-\infty$ en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$. On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; M[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



Exemples

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ (car } n = 2 \text{ est pair)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ (car } n = 3 \text{ est impair)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Fonctions n'admettant pas de limite en l'infini

Remarque

- Une fonction peut ne pas admettre de limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$) notamment :
- lorsqu'elle **oscille** sans se stabiliser (fonction bornée mais pas de valeur limite);
 - lorsqu'elle **oscille avec une amplitude croissante** (fonction non bornée).

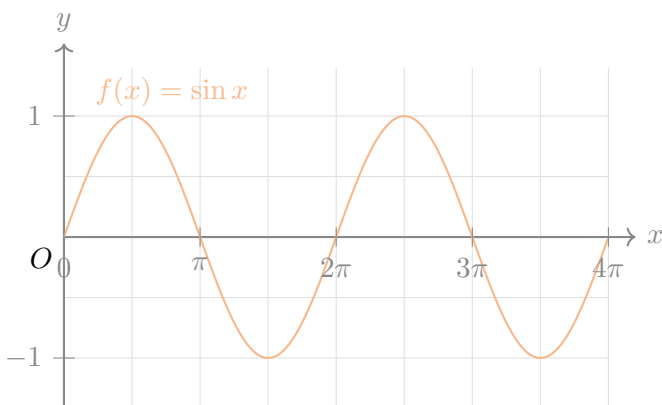
Exemples

La fonction $f(x) = \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$: la courbe continue d'osciller entre -1 et 1 .

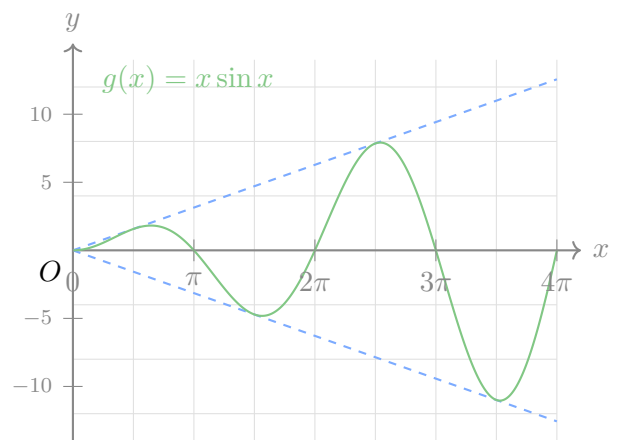
La fonction $g(x) = x \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et n'est pas bornée : l'amplitude des oscillations grandit.

Remarque

Attention : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\frac{1}{x} \rightarrow 0$.



Oscillations persistantes entre -1 et 1 : pas de limite en $+\infty$.



Oscillations d'amplitude croissante : pas de limite en $+\infty$.

2 Limite d'une fonction en un réel

Limite finie en un réel

Définition 2.1: Limite finie en un réel

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f admet une limite ℓ quand x tend vers un réel a lorsque $f(x)$ est aussi proche de ℓ que voulu, pourvu que x soit suffisamment proche de a . On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

Formulation rigoureuse avec ε et δ (utile en classes préparatoires) :

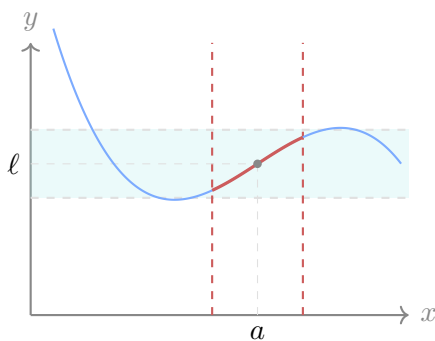
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque

(utile en classe préparatoires). On trouve parfois dans les livres une définition semblable, mais dans laquelle on rajoute que x doit être différent de a . Cela se traduit par :

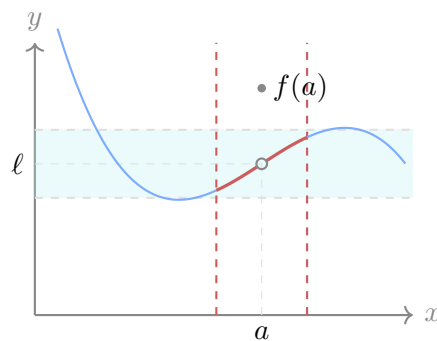
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette notion est un peu plus générale que celle présentée ici, mais nous ne l'utiliserons pas dans ce cours. Si vraiment on en a besoin un jour, on peut remplacer l'ensemble de définition D_f par $D_f \setminus \{a\}$.

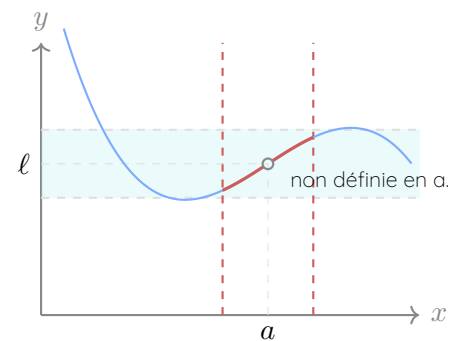


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

(et ici $f(a) = \ell$).



Pour $\varepsilon < \frac{|f(a) - \ell|}{2}$, on a
 $f(a) \notin]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$,
 donc pas de limite en a (ici $a \in D_f$).



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
 même si $f(a)$ n'existe pas.
 (ici $a \notin D_f$)

Exemple classique : $\frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0

Exemple

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$h(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ existe et vaut 1 (c'est une **limite fondamentale**, démontrée plus loin dans le chapitre).

On peut alors **prolonger** la fonction en posant $h(0) = 1$: on obtient une fonction définie sur \mathbb{R} qui conserve la même limite en 0.

Exemples célèbres où la limite n'existe pas en un réel

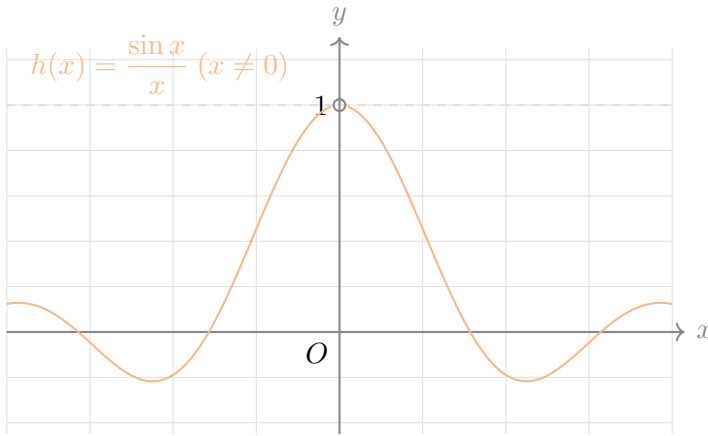
Exemples

Oscillations infinies : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, n'admet **pas** de limite en 0.

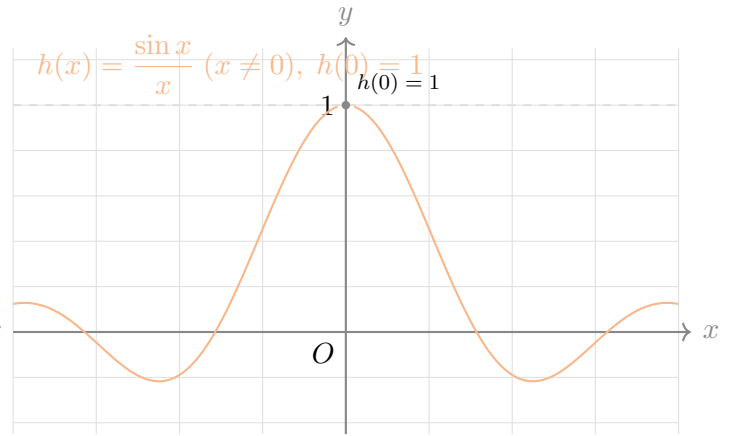
Deux limites unilatérales différentes : $s(x) = \frac{|x|}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = -1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 1$, donc s n'admet **pas** de limite en 0.

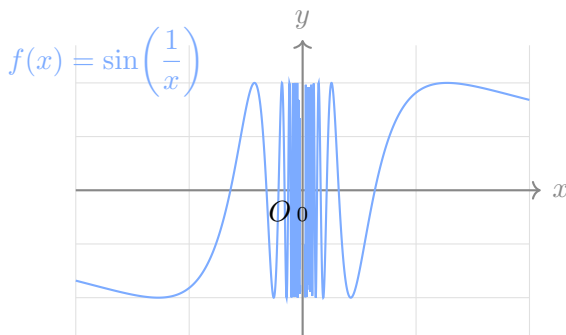




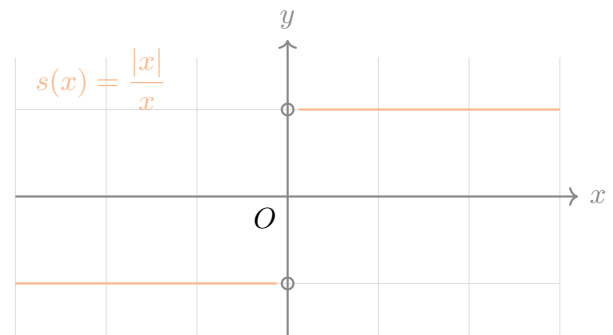
Fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: « trou » en 0.



Fonction prolongée : la limite en 0 est conservée.



La courbe oscille de plus en plus près de 0 : pas de limite.



Deux limites unilatérales différentes : pas de limite en 0.

Limites finie à gauche et à droite

Définition 2.2: Limite à gauche / limite à droite

Soit f définie sur D_f et soit $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une **limite finie à gauche** ℓ_1 en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, (a - \alpha < x < a) \implies |f(x) - \ell_1| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell_1$, ou encore $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell_1$.

On dit que f admet une **limite finie à droite** ℓ_2 en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, (a < x < a + \alpha) \implies |f(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell_2$, ou encore $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_2$.

Propriété 2.1

Cas 1 : f n'est pas définie en a (donc $a \notin D_f$).

La limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existent et sont **égales** à ℓ .

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, alors f **n'admet pas** de limite en a .

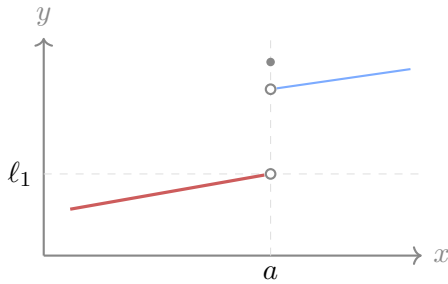
Cas 2 : f est définie en a (donc $a \in D_f$).

Avec **notre** définition (qui n'exclut pas $x = a$), f admet une limite finie en a si et seulement si les deux limites à gauche et à droite existent et vérifient

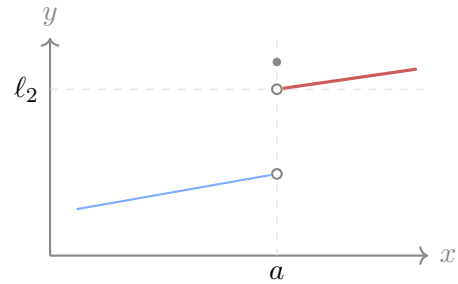
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

Remarque

Dans le cas 2, cette définition de la limite coïncide avec la définition de la **continuité** d'une fonction en a , qui sera étudiée dans le prochain chapitre.



$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l_1$$



$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l_2$$

Si $l_1 \neq l_2$, alors f n'admet pas de limite en a .

Limite infinie en un réel

Définition 2.3: Limite infinie en un réel

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a (sauf éventuellement en a). On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Limite infinie à gauche, limite à droite

Définition 2.4: Limite à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; b[$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs supérieures (à droite) si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a avec $x > a$.

On note :

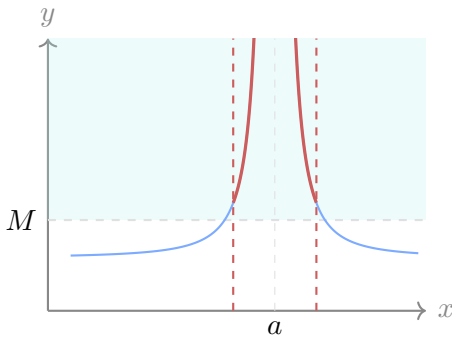
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

Définition 2.5: Limite à gauche

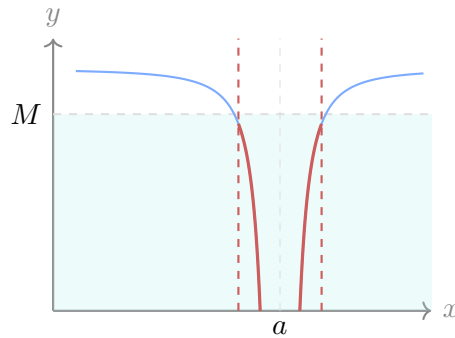
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]c; a[$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs inférieures (à gauche) si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a avec $x < a$.

On note :

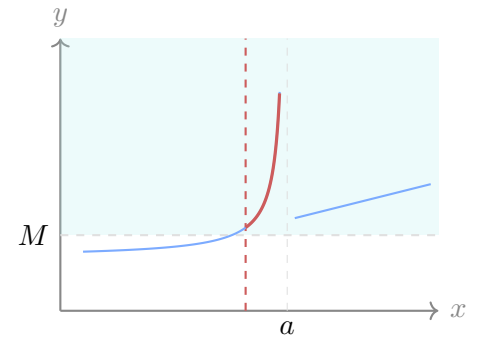
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ (les limites à gauche et à droite sont toutes les deux } +\infty \text{)}$$

Asymptote verticale

Définition 2.6: Asymptote verticale

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a (sauf éventuellement en a).

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .

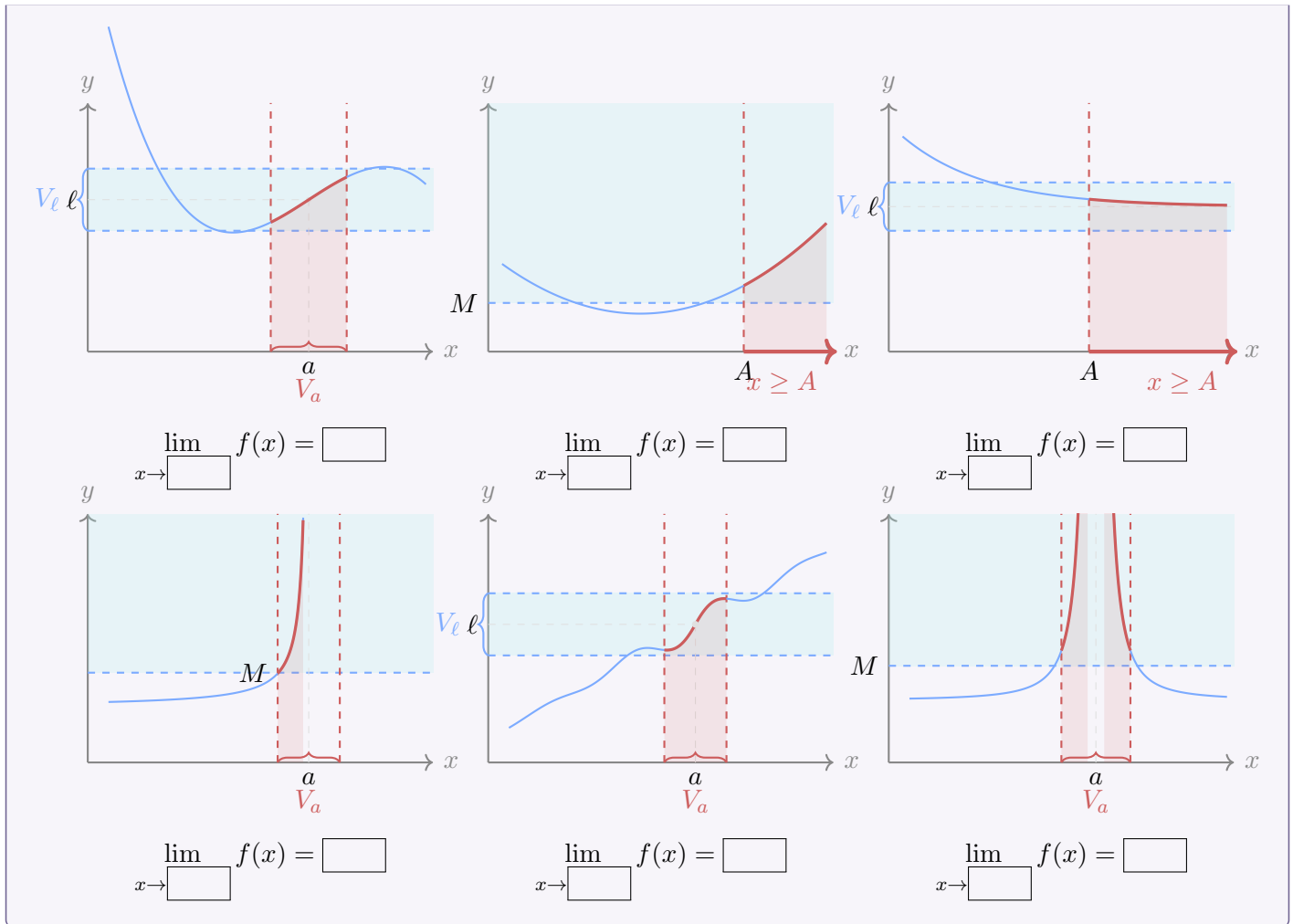
Exemple

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ admet l'axe des ordonnées ($x = 0$) comme asymptote verticale.

La fonction $g(x) = \frac{x}{x-1}$ admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Activité – Conjectures graphiques

Lire une limite sur un graphique. **Consigne.** Pour chacun des six graphiques ci-dessous (de gauche à droite, puis de haut en bas), compléter l'expression de la limite affichée sous le graphique : préciser vers quoi tend x et la valeur de la limite.



Exercice 2.1 – Limite en un point

Niveau = ★★☆☆☆

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- La fonction f admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, donner son équation.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3 Opérations sur les limites

Somme de limites

Propriété 3.1: Somme de limites

Soient f et g deux fonctions. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim(f + g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI (forme indéterminée)

Produit de limites

Propriété 3.2: Produit de limites

Soient f et g deux fonctions. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim(f \times g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	$\pm\infty$	FI
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)

Quotient de limites

Propriété 3.3: Quotient de limites

Soient f et g deux fonctions avec $g(x) \neq 0$ au voisinage de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\ell \neq 0$	0^\pm	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	0	FI
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Remarques

FI signifie "Forme Indéterminée". Une forme indéterminée ne signifie pas qu'il n'y a pas de limite, mais que les règles d'opérations ne permettent pas de conclure directement, il est donc inutile de noter sur sa copie d'examen "Forme indéterminée". Il faut alors transformer l'expression pour lever l'indétermination.

Les formes indéterminées courantes sont :

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \times \infty; 1^\infty$$

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x) = +\infty \text{ (somme de } +\infty \text{ et } +\infty)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)e^x = +\infty$ (produit de $+\infty$ et $+\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+4} = 0$ (quotient de 0 par $+\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x x^3} = 0$ (quotient de 1 par $+\infty$)

4 Limite d'une fonction composée

Définition 4.1: Fonction composée

Soient u et v deux fonctions. On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

Théorème 4.1: Limite d'une fonction composée

Soient f et g deux fonctions, a , b et λ des réels ou $\pm\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \lambda$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lambda$$

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty \text{ et } \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \text{ et } \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$$

5 Théorèmes de comparaison

Théorème de minoration

Théorème 5.1: Théorème de minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a; +\infty[$ telles que pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Théorème de majoration

Théorème 5.2: Théorème de majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a; +\infty[$ telles que pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes (encadrement)

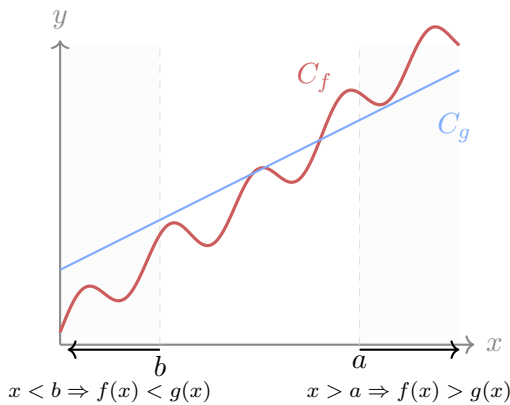
Théorème 5.3: Théorème des gendarmes

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $[a; +\infty[$ telles que pour tout $x \geq a$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

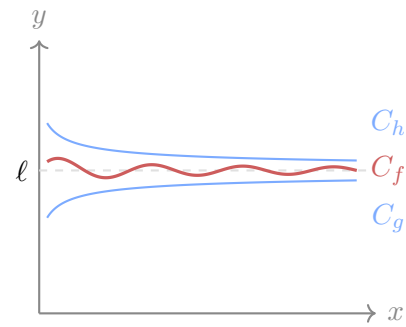
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Exemples

- Soit $f(x) = x + \sin(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, par le théorème de minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit $g(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{1}{x^2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.



On compare f et g par zones :
à gauche $f > g$, à droite $f < g$.



Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim g = \lim h = l$,
alors $\lim f = l$ (théorème des gendarmes).

6 Croissances comparées

Limites de la fonction exponentielle

Théorème 6.1: Limites de l'exponentielle

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Remarque

La preuve de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ utilise l'inégalité $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (démontrée par l'étude de la fonction $f(x) = e^x - x - 1$).

Croissances comparées

Théorème 6.2: Croissances comparées

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Remarque

On dit qu'à l'infini, **l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x** .

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{10} e^x = 0$$

Limite fondamentale

Théorème 6.3: Limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Remarque

Cette limite s'interprète comme le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 :

$$\exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercice 6.1 – Croissances comparées

Niveau = ★★☆☆

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^3}{x^4}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x}$

7 Lever des formes indéterminées

Par factorisation

Exemples

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 2x^2 + x + 5)$.

$$3x^3 - 2x^2 + x + 5 = 3x^3 \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{5}{3x^3} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{5}{3x^3} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 2x^2 + x + 5) = +\infty$.

Par conjugué

Exemples

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})$.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} = \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}}$$

- Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} = 0$.
- Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}) = 0$.

Exercice 7.1 – Formes indéterminées

Niveau = ★★★★★

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+2}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-1}{2-x}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{10-x})$

