

# Produit scalaire et orthogonalité

## Introduction

### Objectifs du chapitre et Capacités attendues :

- Maîtriser les différentes expressions du produit scalaire dans l'espace
- Utiliser le produit scalaire pour déterminer des orthogonalités
- Déterminer des équations cartésiennes de plans
- Étudier les positions relatives de droites et de plans à l'aide du produit scalaire
- Calculer des distances dans l'espace (point-plan, point-droite)
- Résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace avec le produit scalaire

## Annexes historiques

### Histoire du produit scalaire et de l'orthogonalité :

- **Hermann Grassmann** (1809-1877) : Premières idées sur les produits de vecteurs
- **William Rowan Hamilton** (1805-1865) : Développement des quaternions et produits vectoriels
- **Josiah Willard Gibbs** (1839-1903) : Formalisation du produit scalaire et vectoriel moderne
- **Henri Poincaré** (1854-1912) : Applications en géométrie différentielle et physique
- **David Hilbert** (1862-1943) : Espaces vectoriels et notion d'orthogonalité en algèbre linéaire

# 1 Produit scalaire dans l'espace

## Définition 1.1: Produit scalaire de deux vecteurs

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , peut être défini de trois manières équivalentes :

1. **Avec les normes et le cosinus** : Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

où  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une mesure de l'angle géométrique entre les deux vecteurs.

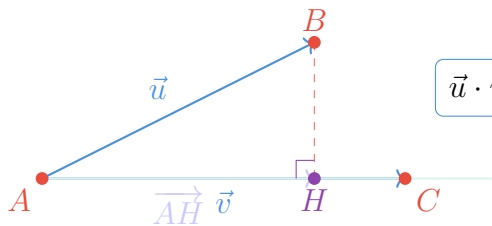
2. **Avec le projeté orthogonal** : Soient  $A, B, C$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur la droite  $(AC)$ . Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AH \times AC & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ de même sens} \\ -AH \times AC & \text{si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ de sens contraire} \end{cases}$$

3. **Avec les normes uniquement** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AH \times AC \text{ (positif car l'angle est aigu)}$$

### Exemple

Dans un tétraèdre régulier  $ABCD$  de côté 2 :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

Avec la méthode du projeté :  $H$  est le milieu de  $[AD]$  dans le triangle équilatéral  $ABD$ , donc  $AH = 1$  et :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AH \times AD = 1 \times 2 = 2$$

## Propriété 1.1: Propriétés du produit scalaire

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs de l'espace et  $k \in \mathbb{R}$  :

1. **Symétrie** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. **Bilinéarité** :

$$(k\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = k(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v} + \vec{w}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

3.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

4. **Identités remarquables** :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

**Théorème 1.1: Caractérisation de l'orthogonalité**

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

**Exemple**

Les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  sont-ils orthogonaux ?

Calculons :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 2 \times (-2) + (-3) \times 0 = 4 - 4 + 0 = 0$

Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

**Remarque**

Le produit scalaire permet de calculer des angles et des longueurs. Par exemple, pour trouver l'angle entre deux vecteurs :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

**À vous de jouer**

Sans passer par les coordonnées :

1. Dans un cube d'arête  $a$ , calculer  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ .
2. Dans un cube d'arête  $a$ , calculer  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

**2 Géométrie analytique dans un repère orthonormé****Définition 2.1: Base et repère orthonormés**

Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dite **orthonormée** si :

- Ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux :  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
- Leurs normes sont égales à 1 :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

Un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit **orthonormé** si sa base est orthonormée.

**Propriété 2.1: Expression analytique du produit scalaire**

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , si  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$ , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

**Exemple**

Dans un repère orthonormé, pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-3) \times 1 + 1 \times (-2) = 8 - 3 - 2 = 3$$

**Propriété 2.2: Distance entre deux points**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , pour  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

**Exemple**

Distance entre  $A(1, -2, 3)$  et  $B(4, 1, -1)$  :

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (1-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$$

**Propriété 2.3: Équation d'une sphère**

Dans un repère orthonormé, la sphère de centre  $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$  et de rayon  $R > 0$  a pour équation :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

**Exemple**

La sphère de centre  $\Omega(1, -2, 3)$  et de rayon 5 a pour équation :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

Le point  $M(4, 2, -1)$  appartient-il à cette sphère ?

$$(4 - 1)^2 + (2 + 2)^2 + (-1 - 3)^2 = 9 + 16 + 16 = 41 \neq 25$$

Donc  $M$  n'appartient pas à la sphère.

**À vous de jouer**

1. Calculer la distance entre  $P(2, -1, 4)$  et  $Q(-3, 2, 0)$
2. Déterminer l'équation de la sphère de centre  $C(1, 0, -2)$  et de rayon 3
3. Vérifier si le point  $M(2, 1, -3)$  appartient à la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 8 = 0$

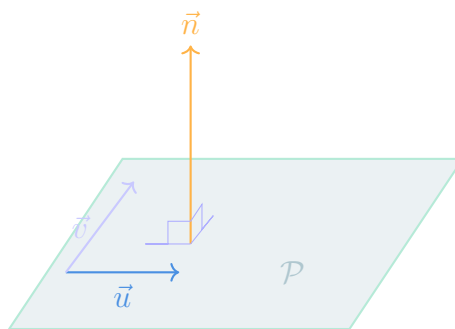
### 3 Plans de l'espace : vecteurs normaux et équations

**Définition 3.1: Vecteur normal à un plan**

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace. Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est dit **normal** au plan  $\mathcal{P}$  s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$ .

Autrement dit, si  $\mathcal{P}$  est défini par un point  $A$  et deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$ , alors  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{P}$  si et seulement si :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

**Théorème 3.1: Équation cartésienne d'un plan**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(x_A, y_A, z_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a, b, c)$  a pour équation cartésienne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Soit encore :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec} \quad d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

### Exemple

Équation du plan passant par  $A(1, -2, 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -1, 4)$  :

$$2(x - 1) - 1(y + 2) + 4(z - 3) = 0 \iff 2x - y + 4z - 16 = 0$$

Vérifions si  $B(3, 0, 2)$  appartient à ce plan :  $2 \times 3 - 0 + 4 \times 2 - 16 = 6 + 8 - 16 = -2 \neq 0$ , donc  $B \notin \mathcal{P}$ .

### Remarque

Dans l'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , les coefficients  $a, b, c$  sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

### Exemple

Les plans d'équations :

$$\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : -4x + 6y - 2z + 10 = 0$$

ont pour vecteurs normaux  $\vec{n}_1(2, -3, 1)$  et  $\vec{n}_2(-4, 6, -2)$ . Comme  $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$ , les plans sont parallèles.

### À vous de jouer

- Déterminer une équation cartésienne du plan passant par  $A(2, -1, 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(-1, 4, 2)$
- Les plans d'équations  $3x - y + 2z - 1 = 0$  et  $-6x + 2y - 4z + 5 = 0$  sont-ils parallèles ?
- Le point  $M(1, 2, -1)$  appartient-il au plan d'équation  $x + 2y - 3z + 4 = 0$  ?

## 4 Orthogonalité et positions relatives

### Orthogonalité de deux droites

#### Propriété 4.1: Orthogonalité de deux droites

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Attention : Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes. Si elles sont sécantes, on dit qu'elles sont perpendiculaires.

### Exemple

Dans un cube  $ABCDEFGH$ , les droites  $(BH)$  et  $(EG)$  sont orthogonales car :

$$\vec{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{EG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BH} \cdot \vec{EG} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = -1 + 1 - 1 = -1 \neq 0$$

Attendez, cela donne -1, donc elles ne sont pas orthogonales. Corrigeons :

En fait, dans un cube,  $(BH)$  et  $(EG)$  ne sont pas orthogonales. Un meilleur exemple serait  $(BH)$  et  $(AC)$  :

$$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0$$

Donc  $(BH)$  et  $(AC)$  sont orthogonales.

## Orthogonalité d'une droite et d'un plan

### Propriété 4.2: Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan.

#### Exemple

Soit la droite  $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$  et le plan  $\mathcal{P} : 4x + 2y - 2z + 5 = 0$ .

Vecteur directeur de  $\Delta$  :  $\vec{u}(2, -1, 3)$  Vecteur normal de  $\mathcal{P}$  :  $\vec{n}(4, 2, -2)$

Sont-ils colinéaires ? Non car il n'existe pas de  $k$  tel que  $2 = 4k$ ,  $-1 = 2k$ ,  $3 = -2k$  simultanément. Donc  $\Delta$  n'est pas orthogonale à  $\mathcal{P}$ .

Vérifions l'orthogonalité :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 4 + (-1) \times 2 + 3 \times (-2) = 8 - 2 - 6 = 0$  Donc  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ , mais pas colinéaire. La droite est parallèle au plan, mais pas orthogonale.

## Orthogonalité de deux plans

### Propriété 4.3: Orthogonalité de deux plans

Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

#### Exemple

Plans  $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : x + 2y + z - 4 = 0$

Vecteurs normaux :  $\vec{n}_1(2, -1, 3)$  et  $\vec{n}_2(1, 2, 1)$

Produit scalaire :  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 3 \times 1 = 2 - 2 + 3 = 3 \neq 0$

Donc les plans ne sont pas orthogonaux.

## Parallélisme d'une droite et d'un plan

### Propriété 4.4: Parallélisme d'une droite et d'un plan

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.

#### Exemple

Droite  $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$  et plan  $\mathcal{P} : x - 2y + z - 5 = 0$

Vecteur directeur :  $\vec{u}(1, -2, 3)$  Vecteur normal :  $\vec{n}(1, -2, 1)$

Produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-2) \times (-2) + 3 \times 1 = 1 + 4 + 3 = 8 \neq 0$

Donc  $\Delta$  n'est pas parallèle à  $\mathcal{P}$ .

## Parallélisme de deux plans

### Propriété 4.5: Parallélisme de deux plans

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

#### Exemple

Plans  $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + z - 4 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : -6x + 4y - 2z + 8 = 0$

Vecteurs normaux :  $\vec{n}_1(3, -2, 1)$  et  $\vec{n}_2(-6, 4, -2)$

On a  $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$ , donc les vecteurs sont colinéaires. Les plans sont parallèles.

### À vous de jouer

1. Montrer que les droites  $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  et  $(d') : \begin{cases} x = 4 - s \\ y = 1 + 2s \\ z = 2 - s \end{cases}$  sont orthogonales.

2. Montrer que la droite  $(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P} : 4x - 2y + z - 1 = 0$ .

3. Les plans  $\mathcal{P}_1 : 2x + 3y - z + 2 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : -4x - 6y + 2z - 5 = 0$  sont-ils parallèles ?

## 5 Intersections et projections orthogonales

### Intersection d'une droite et d'un plan

#### Propriété 5.1: Intersection d'une droite et d'un plan

Pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan :

1. On écrit les équations paramétriques de la droite
2. On substitue ces expressions dans l'équation du plan
3. On résout l'équation obtenue pour trouver la valeur du paramètre
4. On remplace cette valeur dans les équations paramétriques pour obtenir les coordonnées du point d'intersection

#### Exemple

Droite  $\Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$  et plan  $\mathcal{P} : x + 2y - z - 5 = 0$

Substitution :  $(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - (-2 + t) - 5 = 0$

$2 - 3t + 2 + 4t + 2 - t - 5 = 0$

$1 = 0$ ? Ce n'est pas possible. Vérifions :

$2 - 3t + 2 + 4t + 2 - t - 5 = (2 + 2 + 2 - 5) + (-3t + 4t - t) = 1 + 0t = 1$

Donc  $1 = 0$ , impossible. La droite et le plan sont parallèles.

## Intersection de deux plans

### Propriété 5.2: Intersection de deux plans

L'intersection de deux plans non parallèles est une droite. Pour déterminer une représentation paramétrique de cette droite :

1. On résout le système formé par leurs équations cartésiennes
2. On exprime deux variables en fonction de la troisième (qui devient le paramètre)
3. On écrit les équations paramétriques de la droite

### Exemple

Plans  $\mathcal{P}_1 : 2x + y - z + 1 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : x - y + 2z - 3 = 0$

Réolvons le système : 
$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

En ajoutant :  $3x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - 3x$

De la première équation :  $y = -1 - 2x + z = -1 - 2x + (2 - 3x) = 1 - 5x$

Donc avec  $x = t$ , on a : 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

C'est une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

## Projection orthogonale

### Définition 5.1: Projeté orthogonal

- Le **projeté orthogonal** d'un point  $A$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec la droite passant par  $A$  et orthogonale à  $\mathcal{P}$ .
- Le **projeté orthogonal** d'un point  $A$  sur une droite  $\Delta$  est le point d'intersection de  $\Delta$  avec la droite passant par  $A$  et orthogonale à  $\Delta$ .

## Distance d'un point à un plan

### Théorème 5.1: Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, la distance d'un point  $A(x_A, y_A, z_A)$  au plan  $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$  est :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### Exemple

Distance de  $A(1, -2, 3)$  au plan  $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$  :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|2 + 2 + 9 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2.14$$

### Preuve du théorème

On note  $\vec{n} = (a, b, c)$  un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ . Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ , et soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{P}$ .

Alors  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$ . Or  $\overrightarrow{MH}$  est un vecteur du plan  $\mathcal{P}$ , donc  $\overrightarrow{MH} \perp \vec{n}$  et  $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} = 0$ . Donc  $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}$ .

Comme  $\overrightarrow{HA}$  est colinéaire à  $\vec{n}$ , on a  $|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{HA}\| \|\vec{n}\|$ . Ainsi,

$$d(A, \mathcal{P}) = AH = \|\overrightarrow{HA}\| = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Calculons  $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}$  :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = a(x_A - x_M) + b(y_A - y_M) + c(z_A - z_M) = (ax_A + by_A + cz_A) - (ax_M + by_M + cz_M).$$

Comme  $M \in \mathcal{P}$ , on a  $ax_M + by_M + cz_M + d = 0$ , donc  $ax_M + by_M + cz_M = -d$ . D'où

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = ax_A + by_A + cz_A + d.$$

Enfin, dans un repère orthonormé  $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , ce qui donne bien :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

## Distance d'un point à une droite

### Propriété 5.3: Distance d'un point à une droite

La distance d'un point  $A$  à une droite  $\Delta$  est la longueur  $AH$ , où  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\Delta$ .

Pour la calculer :

1. On détermine les coordonnées de  $H$
2. On calcule la distance  $AH$

### Exemple

$$\text{Droite } \Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \text{ et point } A(2, 1, 4)$$

Vecteur directeur :  $\vec{u}(2, -1, 3)$

Soit  $H(1 + 2t, 3 - t, 2 + 3t)$  le projeté. On doit avoir  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$  :

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 1 + 2t - 2 \\ 3 - t - 1 \\ 2 + 3t - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2t \\ 2 - t \\ -2 + 3t \end{pmatrix}$$

$$\text{Produit scalaire : } 2(-1 + 2t) + (-1)(2 - t) + 3(-2 + 3t) = 0$$

$$-2 + 4t - 2 + t - 6 + 9t = 0$$

$$-10 + 14t = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\text{Donc } H \left( 1 + \frac{10}{7}, 3 - \frac{5}{7}, 2 + \frac{15}{7} \right) = \left( \frac{17}{7}, \frac{16}{7}, \frac{29}{7} \right)$$

$$\text{Distance : } AH = \sqrt{\left(\frac{17}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{16}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{29}{7} - 4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{49}} = \frac{\sqrt{91}}{7}$$

## À vous de jouer

1. Déterminer l'intersection de la droite  $\Delta : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$  et du plan  $\mathcal{P} : x + 2y - z - 1 = 0$
2. Calculer la distance du point  $A(1, -1, 2)$  au plan  $\mathcal{P} : 3x - 2y + z - 5 = 0$
3. Déterminer la distance du point  $B(2, 0, 1)$  à la droite  $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$