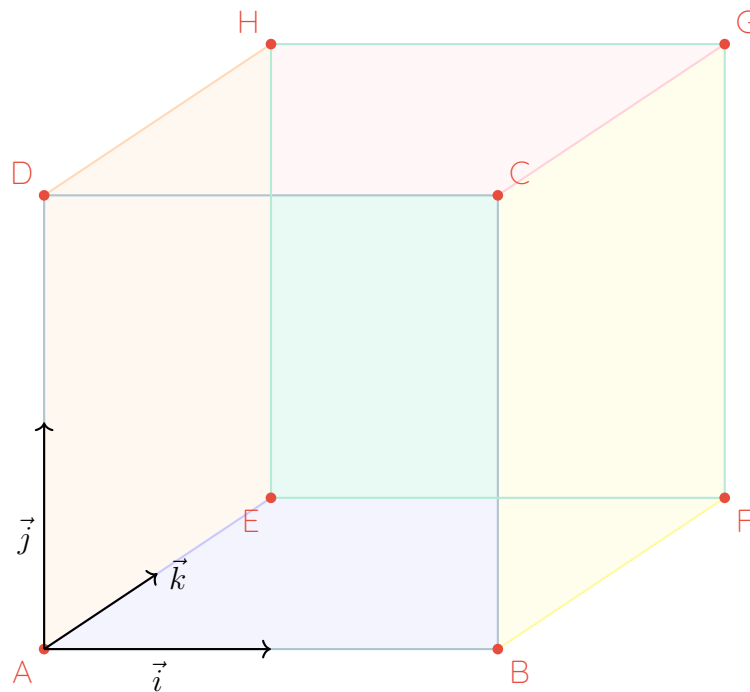


Géométrie dans l'espace

Introduction

Objectifs du chapitre et Capacités attendues :

- Maîtriser les vecteurs dans l'espace et leurs opérations
- Déterminer des représentations paramétriques de droites et de plans
- Utiliser le produit scalaire dans l'espace
- Étudier l'orthogonalité entre droites et plans
- Calculer des distances dans l'espace
- Résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace



Annexes historiques

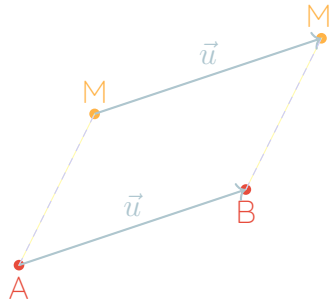
Histoire de la géométrie dans l'espace :

- **Euclide** (III^e siècle av. J.-C.) : Premiers éléments de géométrie dans l'espace dans "Les Éléments"
- **René Descartes** (1596-1650) : Invention de la géométrie analytique avec coordonnées
- **Gaspard Monge** (1746-1818) : Fondateur de la géométrie descriptive
- **Julius Plücker** (1801-1868) : Développement de la géométrie analytique dans l'espace

1 Vecteurs dans l'espace

Définition 1.1: Vecteur de l'espace

Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur \overrightarrow{AB} . Comme, dans le plan, les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté \vec{u} .



Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{BG} sont égaux car $ABGH$ est un rectangle.

Exemple

Soient les points $A(1,2,3)$, $B(4,5,6)$ et $C(7,8,9)$. On a alors

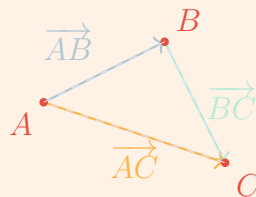
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont égaux.

Propriété 1.1: Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C de l'espace (ils se trouvent forcément dans un même plan) :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



Définition 1.2: Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k\vec{u}$$

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemple

Les vecteurs

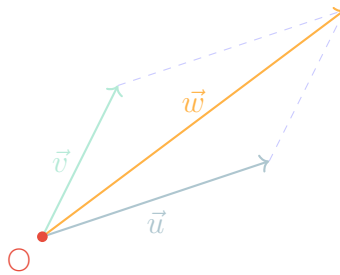
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sont colinéaires car $\vec{u} = 2\vec{v}$.

Propriété 1.2: Combinaison linéaire

Étant donné trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace. On dit que \vec{w} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} s'il existe des réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$



Remarque

On dit aussi que les trois vecteurs sont coplanaires (c'est-à-dire ils sont représentés par 3 bipoints qui appartiennent à un même plan : les vecteurs eux même n'ont pas de position dans l'espace).

Exemple

Dans le plan (Oxy), tout vecteur $\vec{w}(x, y, 0)$ est combinaison linéaire de $\vec{i}(1, 0, 0)$ et $\vec{j}(0, 1, 0)$.

Définition 1.3: Base de l'espace

On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace si les trois vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires.

Propriété 1.3: Décomposition d'un vecteur sur une base

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. Tout vecteur \vec{u} s'écrit de manière unique sous la forme de combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{B} :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ forme les coordonnées du vecteur \vec{u} . On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque

Vu comme un déplacement, un vecteur n'a pas de position dans l'espace! On n'a pas besoin d'ajouter une origine à la base pour pouvoir définir un vecteur.

Exemple

Dans un cube ABCDEFGH, aucun des vecteurs \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AG} n'est une combinaison linéaire des deux autres donc $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AG})$ est une base de l'espace.

Propriété 1.4: Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $A(1, 2, 3)$ et $B(4, -1, 5)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Dans un repère orthonormé, si $C(0, 1, -2)$ et $D(2, -1, 4)$, alors $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

À vous de jouer

Soient les points $A(2, -1, 3)$, $B(5, 0, -1)$ et $C(1, 2, 4)$.

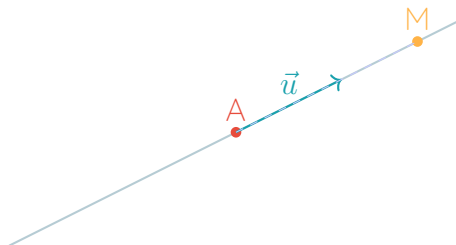
1. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AC} .
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(2, 4, 6)$ sont colinéaires.
3. Les vecteurs $\vec{a}(1, 0, 1)$, $\vec{b}(0, 1, 1)$ et $\vec{c}(1, 1, 0)$ forment-ils une base de l'espace ?

2 Droites dans l'espace

Définition 2.1: Droite de l'espace

Une droite de l'espace est définie :

- soit par la donnée de deux points distincts,
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

**Théorème 2.1: Caractérisation d'une droite**

Soit A un point et \vec{u} un vecteur directeur. La droite passant par A dirigée par \vec{u} est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Exemple

La droite passant par $A(1, 0, 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1, 3)$ contient le point $M(3, -1, 5)$ car

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u}.$$

Propriété 2.1: Représentation paramétrique

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exemple

Une représentation paramétrique de la droite passant par $A(-1, 2, -3)$ de vecteur directeur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est :}$$

$$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 4k \\ z = -3 - 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Exemple

La droite passant par $B(0, 1, -2)$ et $C(2, -1, 1)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Remarque

On peut trouver une autre représentation paramétrique de la même droite en changeant de point et/ou en prenant un autre vecteur directeur colinéaire au précédent.

Définition 2.2: Positions relatives de droites

- **Droites coplanaires** : sécantes en M ou strictement parallèles ou confondues
- **Droites non coplanaires** : ni parallèles ni sécantes

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AB) et (CE) ne sont pas coplanaires.

Exemple

Les droites $(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 + s \\ z = 5 - 2s \end{cases}$ sont-elles sécantes ?

On résout le système :

$$\begin{cases} 1 + t = 2 - s \\ 2 - t = 1 + s \\ 3 + 2t = 5 - 2s \end{cases}$$

La résolution du système donne une seule condition $t = 1 - s$. Les deux droites sont donc confondues.

On peut aussi remarquer que les deux droites ont deux vecteurs directeurs colinéaires et un point en commun.

À vous de jouer

1. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1, -2, 0)$ et $B(3, 1, -1)$.

2. Les droites $(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3 - s \\ z = 1 + 4s \end{cases}$ sont-elles parallèles ?

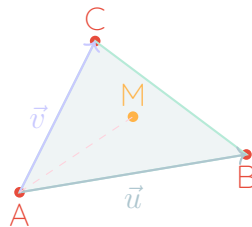
3. Déterminer la position relative des droites (d) et (d') définies ci-dessus.

3 Plans dans l'espace

Définition 3.1: Plan de l'espace

Un plan de l'espace est défini :

- soit par trois points non alignés (ABC),
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A; \vec{u}, \vec{v})$.



Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, le plan (AFH) est déterminé par les trois points A, F et H ou bien par le point A et les vecteurs non colinéaires \overrightarrow{AF} et \overrightarrow{AH} .

Exemple

Le plan passant par $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 1, 2)$ est bien défini car ces trois points ne sont pas alignés.

Théorème 3.1: Caractérisation d'un plan

Soit A un point et \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs non colinéaires. Le plan passant par A dirigé par \vec{u} et \vec{v} est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH et le plan (ABD), le point C appartient à ce plan car le vecteur \overrightarrow{AC}

s'écrit comme une combinaison linéaire de \vec{AB} et \vec{AD} soit $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

Exemple

Le point $M(3, 2, -1)$ appartient-il au plan passant par $A(1, 0, 1)$ dirigé par $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v}(0, 1, -1)$?

On cherche λ, μ tels que $\vec{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Cela donne le système :

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ 2 = \lambda + \mu \\ -2 = -\mu \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2, \mu = 2, \lambda + \mu = 4$$

Donc M n'appartient pas au plan.

Propriété 3.1: Représentation paramétrique d'un plan

Le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ dirigé par $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ a pour représentation :

$$\begin{cases} x = x_A + a\lambda + a'\mu \\ y = y_A + b\lambda + b'\mu \\ z = z_A + c\lambda + c'\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple

Le plan passant par $A(1, -1, 2)$ dirigé par $\vec{u}(2, 0, 1)$ et $\vec{v}(-1, 1, 0)$ a pour représentation paramétrique :

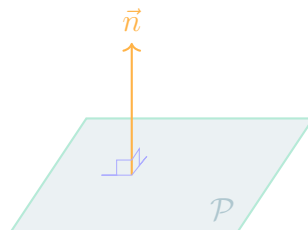
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Théorème 3.2: Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé, un plan a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan.



Exemple

Le plan d'équation $2x - y + 3z - 6 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le point $A(1, 2, 1)$ appartient-il à ce plan ? $2 \times 1 - 2 + 3 \times 1 - 6 = -3 \neq 0$, donc A n'appartient pas au plan.

À vous de jouer

1. Donner une représentation paramétrique du plan passant par $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$ et $C(0, 1, 2)$.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par $D(1, -1, 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, 0, -1)$.
3. Le point $M(2, 1, -1)$ appartient-il au plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$?

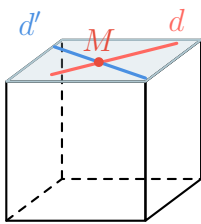
4 Positions relatives dans l'espace

Positions relatives de deux droites

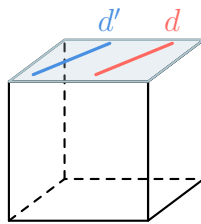
Propriété 4.1: Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à-dire incluses dans un même plan) soit non coplanaires.

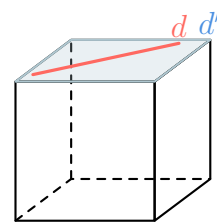
- **Droites coplanaires** : sécantes en M , strictement parallèles ou confondues
- **Droites non coplanaires** : ni parallèles ni sécantes



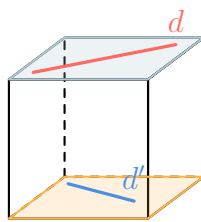
Coplanaires
Sécantes



Coplanaires
Parallèles



Coplanaires
Confondues



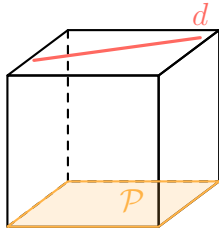
Non coplanaires
Droites gauches

Positions relatives d'une droite et d'un plan

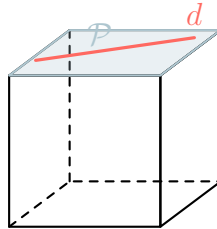
Propriété 4.2: Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit d une droite et \mathcal{P} un plan. Il existe trois configurations :

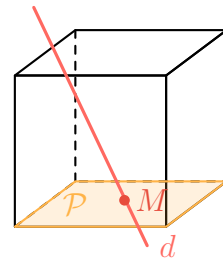
1. d est strictement parallèle à \mathcal{P}
2. d est incluse dans \mathcal{P}
3. d est sécante à \mathcal{P}



Parallèle
 $d \parallel \mathcal{P}$



Incluse
 $d \subset \mathcal{P}$



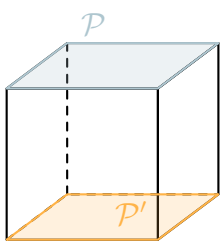
Sécante
 $d \cap \mathcal{P} = \{M\}$

Positions relatives de deux plans

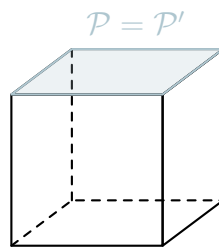
Propriété 4.3: Positions relatives de deux plans

Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans :

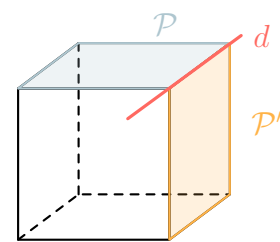
1. \mathcal{P} est strictement parallèle à \mathcal{P}'
2. \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont confondus
3. \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants en une droite d



Parallèles
 $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$



Confondus
 $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$



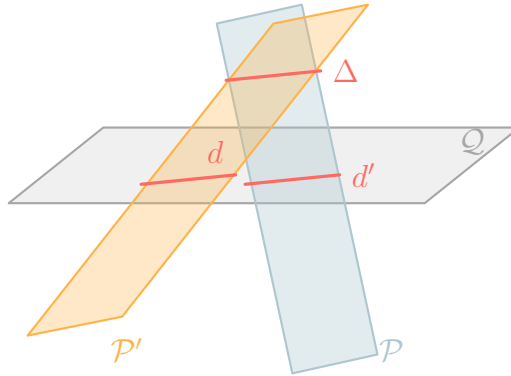
Sécants
 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = d$

Théorème du toit

Théorème 4.1: Théorème du toit

Si deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' contiennent respectivement deux droites d et d' parallèles entre elles alors leur intersection Δ est parallèle à ces deux droites.

$$\text{Si } d \subset \mathcal{P}, d' \subset \mathcal{P}' \text{ et } d \parallel d' \text{ alors } \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta \parallel d \parallel d'$$



Remarque

Le nom "théorème du toit" vient de la ressemblance avec la structure d'un toit : deux plans inclinés (comme les pentes d'un toit) se coupent selon une arête faîtière (la droite Δ) qui est parallèle aux lignes de pente de chaque versant.

Exemple

Dans un prisme droit à base triangulaire ABC-DEF :

- Les faces (ABC) et (DEF) sont parallèles
- Les arêtes [AD], [BE] et [CF] sont parallèles entre elles
- Si un plan coupe les faces (ABD) et (ACE), il les coupe selon deux droites parallèles à [AD]

5 Exercices d'application

Exercice 5.1 –

Exercice 39

Dans le cube ABCDEFGH, on place le point M milieu du segment [AB].

1. Donner une caractérisation du plan (CEM).
2. Justifier que le milieu N du segment [GH] appartient à ce plan.

Exercice 5.2 –

Exercice 40

Dans le cube ABCDEFGH, on place le point R milieu du segment [EH].

1. Démontrer que les points B, R et G définissent bien un plan.
2. En donner une caractérisation.
3. Démontrer que le milieu du segment [AE] appartient à ce plan.

Exercice 5.3 –

Exercice 44

Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points M et N définis par les relations $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{FN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG}$.

Construire la section du plan (EMN) sur le cube.

Exercice 5.4 —

Exercice 45

Dans une pyramide SABCD à base carrée ABCD, on place les points P et Q milieux respectifs des segments [SD] et [AB].

Construire la section du plan (CPQ) sur la pyramide. On justifiera toutes les étapes de la construction.

Exercice 5.5 —

Exercice 49 - Décomposition vectorielle dans un cube

Dans un cube ABCDEFGH, les points J, M, P et Q sont les milieux des segments [BC], [EF], [GH] et [EH]. Dans chacun des cas décomposer le vecteur donné en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE} .

- \overrightarrow{BH}
- \overrightarrow{BP}
- \overrightarrow{BQ}
- \overrightarrow{GJ}
- \overrightarrow{CE}
- \overrightarrow{AM}

Exercice 5.6 —

Exercice 50 - Tétraèdre et relations vectorielles

Dans un tétraèdre ABCD, on considère les points E et F milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et on construit les points M et N tels que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

et

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DE}.$$

- Déterminer la nature des quadrilatères MCEF et ADEN.
- Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF}$.
- Que peut-on en déduire pour les vecteurs \overrightarrow{CE} , \overrightarrow{DF} et \overrightarrow{DN} ?

Exercice 5.7 —

Exercice 52 - Pyramide à base parallélogramme

On considère une pyramide ABCDE de base le parallélogramme BCDE. Le point O est le centre du parallélogramme, le point I est le milieu du segment [AO] et le point J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

- Justifier les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE}, \quad 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}.$$

- En déduire que la droite (IJ) passe par le point D.

Exercice 5.8 —

Exercice 55 - Vérifier qu'une famille de vecteurs forme une base

On considère trois vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} qui forment une base de l'espace. On pose :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Démontrer que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} forment une base de l'espace.

Exercice 5.9 —

Exercice 57 - Combinaison linéaire de vecteurs

On considère trois vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} qui forment une base de l'espace. On pose $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

1. Calculer le vecteur $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.
2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ?

Exercice 5.10 —

Exercice 58 - Étude de vecteurs dans une base

On considère trois vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} qui forment une base de l'espace. On pose :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}.$$

1. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.
2. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$?
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ?

Exercice 5.11 —

Exercice 62 - Base vectorielle dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : A(0 ; 1 ; -1), B(2 ; 1 ; 0), C(-3 ; -1 ; 1) et D(7 ; 3 ; -1).

Déterminer si les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} forment une base de l'espace.

Exercice 5.12 —

Exercice 63 - Vérification d'une base vectorielle

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ou non ? Justifier.

Exercice 5.13 —

Exercice 66 - Position relative d'une droite et d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : A(-1 ; 0 ; 5), B(2 ; 1 ; 3), C(1 ; 1 ; 1), D(4 ; -2 ; 1) et E(1 ; 0 ; 1).

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer si le vecteur \overrightarrow{DE} est combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

3. En déduire la position de la droite (DE) et du plan (ABC).

Exercice 5.14 —

Exercice 67 - Parallélisme et position relative de droites

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : $A(2; 1; 5)$, $B(4; 2; 4)$, $C(3; 3; 5)$ et $D(0; 3; 7)$.

1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
2. Déterminer si le vecteur \overrightarrow{AD} est combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} .
3. En déduire la position relative des droites (AB) et (CD).

Exercice 5.15 —

Exercice 68 - Position relative de deux plans

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : $A(1; 2; -3)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(2; -1; 1)$, $D(-3; 2; 1)$, $E(1; 0; 1)$ et $F(0; 1; -1)$.

Déterminer si les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles ou sécants.

Exercice 5.16 —

Exercice 69 - Calcul vectoriel et position de plans

Dans l'espace muni d'un repère, on donne le point $A(0; 2; -1)$ et les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}$.
2. En déduire la position relative entre le plan défini par le point A et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , et le plan défini par l'origine O et les vecteurs \vec{u} et \vec{w} .

Exercice 5.17 —

Exercice 71 - Droite définie par un point et un vecteur

On donne le point $A(1; -2; -1)$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} .
2. Montrer que le point $B(0; -1; 1)$ appartient à cette droite.
3. Le point $C(1; 2; 3)$ appartient-il à cette droite ?

Exercice 5.18 —

Exercice 72 - Éléments caractéristiques d'une droite

Déterminer les éléments caractéristiques (un point et un vecteur directeur) des droites suivantes.

$$a) \begin{cases} x = -2k \\ y = -1 + k \\ z = -3 - 4k \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = -2 - k \\ y = -3k \\ z = -4 - k \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = -k + 3 \\ y = k + 1 \\ z = -4k \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = 2 - k \end{cases}$$

Exercice 5.19 —

Exercice 73 - Représentation paramétrique d'une droite (AB)

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

- a) $A(1; 0; -2)$ et $B(0; -1; 1)$
- b) $A(-3; 1; 2)$ et $B(-1; 0; -1)$
- c) $A(-2; 1; 1)$ et $B(-1; -1; -1)$
- d) $A(2; 0; 2)$ et $B(0; 1; 1)$

Exercice 5.20 —

Exercice 74 - Appartenance à une droite

On considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Dire si les points suivants appartiennent ou non à la droite d .

- a) $A(2; -1; -3)$
- b) $B(3; 1; -3)$
- c) $C(1; -3; 3)$
- d) $D(0; -3; 6)$

Exercice 5.21 —

Exercice 75 - Différentes méthodes pour vérifier l'appartenance

On considère les points $A(-1; 2; -3)$ et $B(2; 0; 1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. On veut vérifier que le point $C(5; -2; 5)$ appartient à la droite (AB), de deux manières différentes :
 - a) à l'aide de la colinéarité de vecteurs.
 - b) à l'aide de la représentation paramétrique de la droite.
3. Donner alors une autre représentation paramétrique de la droite (AB) à partir du point C .

Exercice 5.22 —

Exercice 76 - Droite, segment, demi-droite

On donne les points $M(-4; 1; 2)$ et $N(-1; 2; 5)$. Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants.

- La droite (MN).
- Le segment [MN].
- La demi-droite [MN).

Exercice 5.23 —

Exercice 77 - Axes de coordonnées

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner une représentation paramétrique de chacune des droites correspondant aux axes de coordonnées.

Exercice 5.24 —

Exercice 78 - Droites dans un cube

Dans un cube ABCDEFGH, on considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer une représentation paramétrique des droites suivantes.

- (CE)
- (FH)
- (BG)