Chapitre 8 19 mai 2026

Sommes de variables aléatoires

Introduction

Objectifs du chapitre et Capacités attendues :

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Comprendre la linéarité de l'espérance et l'additivité de la variance
- Appliquer ces notions à la loi binomiale
- Étudier les échantillons d'une loi de probabilité
- Calculer l'espérance et la variance d'une moyenne d'échantillon

Cadrage pédagogique

Cette leçon fait suite à celle de première sur les probabilités, en étudiant ce qui se passe lorsqu'on additionne deux ou plusieurs résultats liés au hasard (comme des lancers de dés). On s'intéresse surtout à calculer la moyenne et la "dispersion" (l'écart par rapport à la moyenne) de cette somme.
Les élèves ont déjà vu des exemples concrets, comme les lancers de dés ou les tirages au sort. En terminale, on utilise souvent comme exemple le fait de compter le nombre de succès dans une série d'épreuves identiques et indépendantes.
L'objectif est que l'élève sache utiliser deux outils importants : 1. Pour calculer la moyenne d'une somme, on peut simplement additionner les moyennes. 2. Pour calculer la "dispersion" (variance) d'une somme de résultats indépendants, on peut aussi additionner leurs dispersions.
Le but est de développer l'intuition et les compétences en calcul dans des situations faisant intervenir le hasard.

Approche pédagogique

Sur l'espérance : Pour démontrer que la moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes (linéarité de l'espérance), il faut une approche mathématique un peu technique. Le professeur peut donc décider de simplement l'admettre ou de l'illustrer par un exemple concret.
Sur l'indépendance : Dans ce cours, on ne "prouve" pas que des variables sont indépendantes. L'indépendance est une caractéristique naturelle des modèles étudiés (comme une série de lancers de pièces identiques). Ainsi, justifier l'indépendance n'est pas un objectif du programme.
Sur la variance : La règle disant que pour des variables indépendantes, la "dispersion" d'une somme est la somme des "dispersions" (additivité de la variance) est admise sans démonstration. De plus, la formule $E(XY) = E(X)E(Y)$ (qui est liée à l'indépendance) n'est pas au programme et n'est pas à connaître.

Contenus

• Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$. • Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$. Relation $V(aX) = a^2V(X)$. • Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale. • Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$.

Démonstrations

- Espérance et variance de la loi binomiale

1 Somme de deux variables aléatoires

Définition 1.1: Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Définition 1.2: Somme de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ avec n un entier naturel non nul.
On définit la variable aléatoire $Z = X+Y$ par :

$$\text{pour tout } i \in [1; n], \quad Z(\omega_i) = X(\omega_i) + Y(\omega_i)$$

La loi de probabilité de la somme $X+Y$ est donnée par :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} P((X=i)\cap(Y=j))$$

Exemple

On joue à un premier jeu qui peut nous faire gagner ou perdre 1€.
On note X la variable aléatoire associée au gain de ce premier jeu.
On joue à un deuxième jeu qui peut nous faire gagner 3€ ou 5€.
On note Y la variable aléatoire associée au gain de ce deuxième jeu.
La variable aléatoire $X+Y$ donne ainsi le gain cumulé sur les deux jeux.
Cette nouvelle variable peut prendre les valeurs 2, 4 ou 6.
La probabilité de gagner 4€ sur le cumul des deux jeux est donc donnée par la formule :

$$P(X+Y=4) = P((X=1)\cap(Y=3)) + P((X=-1)\cap(Y=5))$$

Définition 1.3: Indépendance de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω muni d'une loi de probabilité.
Soient respectivement E et F, les ensembles des valeurs prises par X et Y.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(X=x)\times P(Y=y)$$

Dans ce cas, la loi de la somme devient :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k} P(X=i)\times P(Y=j)$$

Définition 1.4: Produit par un réel

Soit X une variable aléatoire et a un nombre réel. Le produit de X par le réel a est la variable aléatoire notée aX qui prend pour valeur le produit des valeurs de X par a.

Exemple
On lance un dé. On note X la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé. $2X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs 2, 4, 6, 8, 10 ou 12.

Exemple
On lance un dé. On note X la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé. $X+X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

2 Linéarité de l'espérance

Propriété 2.1: Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers fini Ω muni d'une loi de probabilité, et a, b deux nombres réels.

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX)=aE(X)$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Démonstration. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers fini $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\dots;\omega_n\}$ avec n un entier naturel non nul, muni d'une loi de probabilité P.

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}(X(\omega_i)+Y(\omega_i))\times P(\omega_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X(\omega_i)\times P(\omega_i)+Y(\omega_i)\times P(\omega_i))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X(\omega_i)\times P(\omega_i)+\sum_{i=1}^{n}Y(\omega_i)\times P(\omega_i)$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Pour la deuxième formule :

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(aX(\omega_i)+b)\times P(\omega_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(aX(\omega_i)\times P(\omega_i)+b\times P(\omega_i))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}aX(\omega_i)\times P(\omega_i)+\sum_{i=1}^{n}b\times P(\omega_i)$$

$$\begin{aligned}
&= a\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \times P(\omega_i) + b\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) \\
&= a\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \times P(\omega_i) + b \times 1 \\
E(aX+b) &= aE(X) + b
\end{aligned}$$

□

Exemple

On lance un dé équilibré. On note X la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé.

On lance une pièce de monnaie équilibrée dont les faces sont numérotées 5 et 15. On note Y la variable aléatoire associée au résultat du lancer de cette pièce.

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} \quad \text{et} \quad E(Y) = \frac{1}{2}(5+15) = 10.$$

Donc $E(X+Y) = \frac{21}{6} + 10 = \frac{81}{6}$. En moyenne, sur un très grand nombre de lancers, la somme des deux valeurs sera de $\frac{81}{6}$.

3 Variance de sommes de variables aléatoires indépendantes

Propriété 3.1: Variance de la somme

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même univers fini Ω muni d'une loi de probabilité.

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque

Les variables doivent être indépendantes car dans la démonstration, nous avons besoin de la propriété $E(XY) = E(X)E(Y)$ qui n'est vraie que dans le cas de variables aléatoires indépendantes.

Propriété 3.2: Variance du produit par un réel

Soit X une variable aléatoire et a un nombre réel.

$$V(aX) = a^2V(X)$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire et a un nombre réel.

$$\begin{aligned}
V(aX) &= E\left((aX)^2\right) - (E(aX))^2 \\
V(aX) &= E\left(a^2X^2\right) - (aE(X))^2 \\
V(aX) &= a^2E\left(X^2\right) - a^2\left(E(X)\right)^2 \quad \text{d'après la propriété 2} \\
V(aX) &= a^2\left(E\left(X^2\right) - (E(X))^2\right) \\
V(aX) &= a^2V(X)
\end{aligned}$$

□

Exemple

On lance un dé équilibré et on note X la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé et on note $Y = 2X$:

Première méthode : Calcul direct de $V(Y)$ sans formule

$$V(Y) = \frac{1}{6}(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2) - \left[\frac{1}{6}(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12)\right]^2 = \frac{35}{3}$$

Deuxième méthode : Utilisation de la formule $V(aX) = a^2V(X)$

$$2^2 \times V(X) = \frac{35}{3}$$

Détail du calcul de $V(X)$:

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$
$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

Ainsi : $2^2 \times V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{140}{12} = \frac{35}{3}$

Remarque

Ne pas confondre les deux variables aléatoires 2X et X+X

4 Application à la loi binomiale

Remarque

Les résultats de cette partie sont valables pour la somme de n variables aléatoires indépendantes.

Propriété 4.1: Loi binomiale comme somme de Bernoulli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Exemple

Dans une usine automobile, on étudie la fiabilité des systèmes de freinage. On note X la variable aléatoire égale à 1 si le système de freinage est défectueux et 0 sinon. La probabilité qu'un système de freinage soit défectueux est de 3%. X suit alors la loi de Bernoulli de paramètre 0,03.

On contrôle quotidiennement un échantillon de 50 véhicules sortis de la chaîne de production. On note $(X_1, X_2, ..., X_{50})$ les variables indiquant l'état des systèmes de freinage pour chaque véhicule. Toutes ces variables suivent la loi de Bernoulli de paramètre 0,03 et sont indépendantes. Alors la variable $S = X_1 + X_2 + ... + X_{50}$ qui compte le nombre total de systèmes de freinage défectueux dans l'échantillon suit la loi binomiale $B(50; 0,03)$.

Propriété 4.2: Espérance et variance de la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
L'espérance de X est :

$$E(X) = np$$

La variance de X est :

$$V(X) = np(1-p)$$

L'écart type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration. Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. La variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \quad \text{d'après la propriété 1} \\ &= p + p + \ldots + p \quad \text{car l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre } p \text{ est } p \\ &= np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) \quad \text{d'après la propriété 3} \\ &= p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) \quad \text{car la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre } p \text{ est } p(1-p) \\ V(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

□

5 Échantillon d'une loi de probabilité

Définition 5.1: Échantillon de taille n

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité. On considère une liste de variables aléatoires indépendantes $(X_1, X_2, ..., X_n)$ suivant toutes la même loi de probabilité que X.
Cette liste est appelée **échantillon de taille n** associé à X.
Des variables aléatoires suivant une même loi de probabilité sont dites **identiquement distribuées**.

Exemple
Dans l'exemple précédent sur les systèmes de freinage automobile, les 50 véhicules prélevés dans l'usine constituent un échantillon de taille 50.

Propriété 5.1: Somme d'un échantillon

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ d'une loi de probabilité d'espérance μ et d'écart type σ. Soit S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
L'espérance de S_n est :

$$E(S_n) = n\mu = n \times E(X_1)$$

La variance de S_n est :

$$V(S_n) = n\sigma^2$$

L'écart type de S_n est :

$$\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$$

Démonstration. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ d'une loi de probabilité d'espérance μ et d'écart type σ. Soit S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \quad \text{d'après la propriété 1} \\ &= \underbrace{\mu + \mu + \ldots + \mu}_{n \text{ fois}} \\ E(S_n) &= n\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(S_n) &= V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) \quad \text{d'après la propriété 3} \\ &= \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2}_{n \text{ fois}} \\ V(S_n) &= n\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{n\sigma^2} = \sigma\sqrt{n}$$

□

Propriété 5.2: Moyenne d'un échantillon

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ d'une loi de probabilité d'espérance μ et d'écart type σ. Soit M_n la variable aléatoire moyenne définie par $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.
L'espérance de M_n est :

$$E(M_n) = \mu$$

La variance de M_n est :

$$V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

L'écart type de M_n est :

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ d'une loi de probabilité d'espérance μ et d'écart type σ. Soit S_n la variable aléatoire définie par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

$$E(M_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(S_n) \quad \text{d'après la propriété 2}$$
$$= \frac{1}{n} \times n\mu \quad \text{d'après la propriété 6}$$
$$E(M_n) = \mu$$

$$V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right)$$
$$= V\left(\frac{1}{n}S_n\right)$$
$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) \quad \text{d'après la propriété 4}$$
$$= \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 \quad \text{d'après la propriété 7}$$
$$V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

□

Remarque
Plus la taille n de l'échantillon est grande, plus la variance de M_n est petite donc plus la valeur de M_n se rapproche de l'espérance de X.

Exemple
Une entreprise produit des résistances électriques. La résistance d'une pièce, mesurée en ohms (Ω), est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = 95) = 0,1, \quad P(X = 100) = 0,8, \quad P(X = 105) = 0,1$$

On prélève quotidiennement un échantillon de n résistances pour contrôler la qualité de production. On note M_n la résistance moyenne de l'échantillon.
Le service qualité souhaite déterminer la taille d'échantillon nécessaire pour que la variance de la résistance moyenne soit inférieure à 0,25 Ω^2.

$$E(X) = 0,1 \times 95 + 0,8 \times 100 + 0,1 \times 105 = 9,5 + 80 + 10,5 = 100$$
$$E(X^2) = 0,1 \times 9025 + 0,8 \times 10000 + 0,1 \times 11025 = 902,5 + 8000 + 1102,5 = 10005$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10005 - 10000 = 5$$

On veut : $V(M_n) < 0,25$

$$\frac{V(X)}{n} < 0,25 \iff \frac{5}{n} < 0,25 \iff n > \frac{5}{0,25} = 20$$

Il faut donc prélever au moins 21 résistances chaque jour pour que la variance de la résistance moyenne soit inférieure à 0,25 Ω^2.

6 Exercices d'application

Exercice 6.1 — Somme de variables indépendantes

Niveau = ★★☆☆☆

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies par leurs lois de probabilité :

x_i	-1	0	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,3

y_i	1	3
$P(Y = y_i)$	0,6	0,4

1. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
2. En déduire $E(X+Y)$ et $V(X+Y)$ en utilisant les propriétés de linéarité.
3. Déterminer la loi de probabilité de $X+Y$.
4. Calculer $E(X+Y)$ et $V(X+Y)$ directement à partir de la loi de $X+Y$ et vérifier la cohérence avec les résultats précédents.
5. Calculer $E(2X-3Y+1)$ et $V(2X-3Y+1)$.

Exercice 6.2 — Loi binomiale et échantillonnage

Niveau = ★★★☆☆

Une usine produit des pièces électroniques dont 5% sont défectueuses. On prélève au hasard 50 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Interpréter la valeur de $E(X)$ dans le contexte de l'exercice.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 3 pièces défectueuses.
5. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 2 pièces défectueuses.
6. On considère un échantillon de 200 pièces. Soit M la proportion de pièces défectueuses dans cet échantillon. Donner l'espérance et l'écart type de M.
7. Déterminer la taille d'échantillon nécessaire pour que l'écart type de la proportion soit inférieur à 0,01.

Exercice 6.3 — Application des propriétés fondamentales

Niveau = ★★★★☆

On considère une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	0	3	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un échantillon (X_1, X_2, X_3) de variables indépendantes suivant la même loi que X. Soit $S = X_1 + X_2 + X_3$ et $M = \frac{S}{3}$.
   (a) Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.
   (b) Calculer $E(M)$, $V(M)$ et $\sigma(M)$.
3. On définit $Y = 2X - 1$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
5. Calculer $E(X+Y)$ et $V(X+Y)$.