

Série. 8

30 novembre 2025

Concentration et loi des grands nombres

Exercice 0.1 — Intervalles et valeurs absolues

Soit Y une variable aléatoire. Recopier et compléter les pointillés.

- a) $Y \in [0; 10] \iff |Y - \dots| \leq \dots$
 b) $Y \in [45; 51] \iff |Y - \dots| \leq \dots$
 c) $Y \in]-\infty; 12] \cup [14; +\infty[\iff |Y - \dots| \geq \dots$
 d) $Y \in]-\infty; 2] \cup [16; +\infty[\iff |Y - \dots| \geq \dots$

Exercice 0.2 — Probabilités complémentaires

Soit Y' une variable aléatoire telle que $p(Y' \in]-\infty; 10] \cup [20; +\infty[) = 0,35$. Déterminer $p(|Y' - 15| < 5)$.

Exercice 0.3 — Goûter de Yolaine

Yolaine vient d'emménager dans son immeuble et a invité ses 45 voisins à un goûter.

Elle a lu sur des forums qu'il y a une chance sur cinq qu'un ou une voisine se présente à ce genre d'événement. On suppose par ailleurs l'indépendance des venues des différents voisins.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X donnant le nombre de voisins qui se présenteront effectivement pour le goûter ?
2. Yolaine estime que la quantité de nourriture qu'elle a achetée pour le goûter conviendra si entre 7 et 11 voisins se présentent.
 - a) Écrire la phrase en remplaçant k par le plus grand entier possible : « la quantité de nourriture sera trop ou pas assez importante si $|X - 9| \geq k$. »
 - b) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à cet événement puis l'interpréter dans les termes de l'énoncé.
 - c) Calculer $p(7 \leq X \leq 11)$ avec la loi binomiale puis discuter la majoration obtenue à la question 2. b).

Exercice 0.4 — Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire suivant une loi d'espérance $E(X) = 8$ et de variance $V(X) = 1$.

1. a) Expliquer pourquoi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne permet pas de majorer directement $p(X \in]-\infty; 6] \cup [12; +\infty[)$.
 b) Montrer que $p(X \in]-\infty; 6] \cup [12; +\infty[) \leq p(|X - 8| \geq 2)$.
 c) En déduire une majoration de $p(X \in]-\infty; 6] \cup [12; +\infty[)$.
2. a) Expliquer pourquoi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne permet pas de minorer directement $p(X \in]5; 13]$.
 b) Montrer que $p(X \in]5; 13] \geq p(|X - 8| < 3)$.
 c) En déduire une minoration de $p(X \in]5; 13]$.

Exercice 0.5 — Autonomie du smartphone

Lorsque la batterie d'un certain modèle de téléphone est entièrement chargée, son autonomie est donnée en heures par une variable aléatoire A d'espérance $E(A) = 11,2$ et de variance $V(A) = 4$.

Déterminer une minoration de la probabilité que le smartphone puisse être utilisé plus de 7 heures après une charge.

Exercice 0.6 — Consommation d'eau

Bogdan boit généralement 10 verres d'eau par jour. Compte tenu de la capacité du verre, on considère que la quantité bue au i -ème verre en ml est donnée par une variable aléatoire X_i d'espérance $E(X_i) = 95$ et d'écart-type $\sigma(X_i) = 5$ et on admet que ces variables aléatoires sont indépendantes.

1. On appelle $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ et $M = \frac{S}{10}$.

Justifier $p(S \geq 1000) \leq p(|M - 95| \geq 5)$.

2. En déduire une majoration de la probabilité que Bogdan boive au moins un litre d'eau par jour à l'aide de l'inégalité de concentration.

Exercice 0.7 — Distribution de prospectus

Amir distribue tous les jours des prospectus à la sortie du métro. Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i -ème jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100. Au bout de combien de jours peut-il être sûr au risque de 5% d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus (exclus) par jour ?

Exercice 0.8 — Temps de trajet

Pour se rendre au travail, Audrey prend le métro. La variable aléatoire T donnant son temps de trajet en minutes a pour espérance $E(T) = 6$ et pour écart-type $\sigma(T) = 0,25$. Au bout de combien de trajets de métro peut-elle être sûre au risque d'erreur de 2% d'avoir mis en moyenne entre 5 minutes 45 et 6 minutes 15 pour se rendre au travail ?

Exercice 0.9 — Pièce truquée

On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,6.

1. On lance n fois cette pièce et on appelle X_i la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus au i -ème lancer.

a) Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli. b) Déterminer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

2. On cherche à déterminer un nombre de lancers à partir duquel on est sûr au seuil de 95% qu'il y a plus de PILE que de FACE.

a) On appelle M_n la variable aléatoire donnant la moyenne des n premiers X_i . Quel est le plus grand intervalle I de la forme $]0,6 - \delta; 0,6 + \delta[$ tel que $M_n \in I$ implique qu'il y ait eu plus de PILE que de FACE ?

b) À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer à partir de combien de lancers on peut être sûr au seuil de 95% que $M_n \in I$. On appellera n_0 ce nombre de lancers.

c) En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'il y ait plus de PILE que de FACE quand on lance n_0 fois cette pièce. Commenter.

Exercice 0.10 — Contrôle de qualité des packs d'eau

Une entreprise vend des packs d'eau de 6 bouteilles. La loi de la variable aléatoire X donnant le volume d'eau en mL d'une bouteille a une espérance de 1 000 et une variance de 15. Les volumes d'eau de chaque bouteille sont supposés indépendants. Z est la variable aléatoire donnant le volume d'eau en mL dans un pack de 6 bouteilles.

1. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.

2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité que le pack d'eau contienne entre 5,950 L et 6,050 L (exclus).

3. On suppose que la probabilité qu'un pack d'eau contienne entre 5,950 L et 6,050 L est égale à 0,98. On prélève 200 packs d'eau sur l'ensemble de la production. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. N est la variable aléatoire donnant le nombre de packs qui contiennent entre 5,950 L et 6,050 L dans le prélèvement.

a) Donner la loi suivie par N . Justifier.

b) Calculer $p(N \geq 194)$ au millième près.

c) Calculer $E(N)$ et interpréter ce résultat.