

# Loi binomiale

## Exercice 0.1 — Loi de Bernoulli basique ★☆☆☆☆

On lance un dé équilibré à 6 faces. On considère le succès « obtenir un 6 ».

1. Quelle est la probabilité de succès ?
2. On définit la variable aléatoire  $X$  qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. Montrer que  $X$  suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
3. Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .

## Exercice 0.2 — Loi binomiale simple ★☆☆☆☆

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. On tire 5 boules avec remise. Soit  $X$  le nombre de boules rouges obtenues.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale.
2. Calculer  $\mathbb{P}(X = 2)$ .
3. Calculer  $\mathbb{P}(X \geq 1)$ .

## Exercice 0.3 — QCM classique ★★☆☆☆

Un QCM comporte 10 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève répond au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait exactement 5 bonnes réponses ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins 8 bonnes réponses ?
3. Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de bonnes réponses.

## Exercice 0.4 — Contrôle qualité ★★☆☆☆

Une usine produit des composants dont 5% sont défectueux. On prélève 20 composants.

1. Probabilité d'avoir exactement 2 composants défectueux ?
2. Probabilité d'avoir au plus 1 composant défectueux ?
3. Déterminer  $k$  tel que  $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0.9$ .

## Exercice 0.5 — Seuil critique ★★★☆☆

Une machine produit des pièces avec 10% de défauts. On contrôle 50 pièces.

1. Calculer la probabilité d'avoir plus de 8 pièces défectueuses.
2. À partir de combien de pièces défectueuses doit-on remettre en cause le fonctionnement de la machine (seuil à 5%) ?

## Exercice 0.6 — Probabilités conditionnelles ★★★☆☆

Dans un lot de 20 pièces avec 4 défectueuses, on tire 5 pièces avec remise. Sachant qu'on a obtenu au moins une pièce défectueuse, quelle est la probabilité d'en avoir exactement 2 ?

## Exercice 0.7 — Test d'hypothèse ★★★☆☆

Un fabricant affirme qu'au plus 2% de ses produits sont défectueux. Sur 200 produits testés, on trouve 8 défectueux. Peut-on rejeter l'hypothèse au seuil de 5% ?

**Exercice 0.8** — Loi binomiale négative ★★★★★☆

On lance un dé jusqu'à obtenir 3 fois le chiffre 6. Soit  $X$  le nombre de lancers nécessaires.

1. Montrer que  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-3}$  pour  $k \geq 3$
2. Calculer  $\mathbb{P}(X \leq 10)$

**Exercice 0.9** — Loi binomiale et espérance conditionnelle ★★★★★

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Calculer  $\mathbb{E}[X|X \geq 1]$ .

**Exercice 0.10** — Marche aléatoire et binomiale ★★★★★

Une particule se déplace sur  $\mathbb{Z}$ . À chaque étape, elle va à droite avec probabilité  $p$  et à gauche avec probabilité  $1 - p$ . Après  $n$  pas, quelle est la probabilité d'être en position  $k$  ?