

# Loi binomiale

## 1 Introduction historique

Jacques Bernoulli (1654-1705) donne son nom à la loi binomiale, qu'il formalise dans l'ouvrage posthume *Ars Conjectandi*, paru en 1713. Héritière des travaux sur les combinaisons et le théorème binomial, cette loi décrit le nombre de succès obtenus lors d'épreuves identiques et indépendantes. Au XVIII<sup>e</sup> siècle, Abraham de Moivre puis Pierre-Simon de Laplace en précisent les propriétés et introduisent des méthodes d'approximation. Outil simple et robuste, la loi binomiale sert dans les sondages d'opinion, le contrôle qualité, la génétique mendélienne, la fiabilité des systèmes et, plus largement, la gestion du risque en finance.

## 2 Expériences aléatoires successives indépendantes

### Univers associé à plusieurs épreuves indépendantes

#### Définition 2.1

Deux expériences aléatoires sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influence pas le résultat de l'autre.

L'**univers** associé à la succession de  $n$  expériences indépendantes est le produit cartésien des univers de chaque expérience. Si chaque expérience a  $m$  issues possibles, l'univers global contient  $m^n$  issues.

#### Exemple (Lancers de dés successifs)

On lance deux dés équilibrés. L'univers est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Il y a  $6 \times 6 = 36$  issues possibles équiprobables.

### Probabilité d'une issue d'une succession d'épreuves indépendantes

#### Propriété 2.1

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des événements indépendants, alors la probabilité de leur intersection est :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n)$$

#### Exemple (Pièces de monnaie)

On lance 3 pièces équilibrées. La probabilité d'obtenir (Face, Face, Pile) est :

$$\mathbb{P}(F, F, P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

## 3 Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

### Épreuve de Bernoulli

#### Définition 3.1

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre  $p \in ]0; 1[$  toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles :

- **Succès** ( $S$ ) avec probabilité  $p$
- **Échec** ( $\bar{S}$ ) avec probabilité  $1 - p$



#### Exemple (Lancer de pièce)

Lancer une pièce équilibrée et considérer "Face" comme succès :  $p = 0,5$

### Loi de Bernoulli

#### Définition 3.2

Une variable aléatoire  $X$  suit une **loi de Bernoulli** de paramètre  $p \in ]0; 1[$ , notée  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

où  $X = 1$  représente le succès et  $X = 0$  l'échec.

$x_i$	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	$p$

#### Propriété 3.1

Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

## 4 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

### Schéma de Bernoulli

#### Définition 4.1

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres  $n$  et  $p$  est la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes** de paramètre  $p$ .



#### Remarque

Pour justifier qu'une situation suit un schéma de Bernoulli, il faut vérifier :

- **Répétition** :  $n$  épreuves identiques sont répétées
- **Indépendance** : le résultat d'une épreuve n'influence pas les autres
- **Binarité** : chaque épreuve n'a que deux issues (succès/échec)
- **Probabilité constante** : la probabilité de succès  $p$  reste la même

## Loi binomiale

### Définition 4.2

Soit  $X$  le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors  $X$  suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ , notée  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$  :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  est le coefficient binomial.

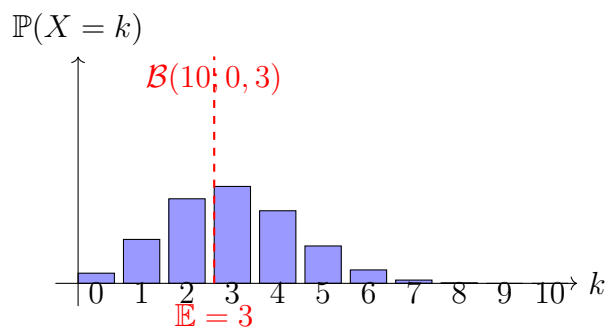
### Propriété 4.1

Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

## 5 Représentation graphique et propriétés

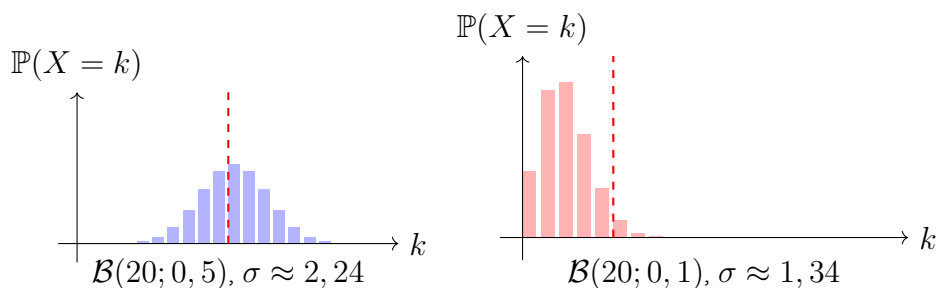
### Forme du diagramme en barres



#### Remarque

La valeur centrale du diagramme correspond toujours à l'**espérance**  $\mathbb{E}(X) = np$ . La distribution est symétrique lorsque  $p = 0,5$ .

### Comparaison de variances



### Propriété 5.1

La **variance**  $V = \sigma^2 = np(1 - p)$  d'une loi binomiale :

- Est **maximale** lorsque  $p = 0,5$
- Est **nulle** lorsque  $p = 0$  ou  $p = 1$
- Est symétrique par rapport à  $p = 0,5$  (comme une fonction qui à  $p \rightarrow V(p)$ )

## 6 Intervalle de fluctuation

### Définition et interprétation

#### Définition 6.1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Un **intervalle de fluctuation** au seuil de  $1 - \alpha$  (avec  $0 < \alpha < 1$ ) est un intervalle  $I$  tel que :

$$\mathbb{P}(X \in I) \geq 1 - \alpha$$

- $1 - \alpha$  : **seuil** de l'intervalle (probabilité d'être dans l'intervalle)
- $\alpha$  : **risque** (probabilité d'être en dehors de l'intervalle)

### Intervalle de fluctuation centré

#### Définition 6.2

Un **intervalle de fluctuation centré** au seuil  $1 - \alpha$  est un intervalle  $[a, b]$  tel que :

$$\mathbb{P}(X < a) \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > b) \leq \frac{\alpha}{2}$$

Le risque  $\alpha$  est réparti équitablement des deux côtés de l'intervalle.

## Exercices

#### Exercice 6.1 – Loi de Bernoulli

Source=Interne; Niveau=★★★

On lance un dé équilibré à 6 faces. On considère le succès « obtenir un 6 ».

1. Quelle est la probabilité de succès ?
2. On définit la variable aléatoire  $X$  qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. Montrer que  $X$  suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
3. Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .

#### Exercice 6.2 – Loi binomiale – QCM

Source=Interne; Niveau=★★★

Un QCM comporte 10 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève répond au hasard à toutes les questions. On note  $X$  le nombre de réponses correctes.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il ait exactement 5 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité qu'il ait au moins 8 bonnes réponses.
4. Calculer l'espérance de  $X$ . Interpréter le résultat.

#### Exercice 6.3 – Loi binomiale – Contrôle qualité

Source=Interne; Niveau=★★★★

Une usine produit des composants électroniques. On estime que 5% des composants produits sont défectueux. On prélève au hasard 20 composants dans la production. On suppose que les tirages sont indépendants.

1. Justifier que le nombre de composants défectueux suit une loi binomiale.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 composants défectueux ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 1 composant défectueux ?
4. Déterminer le plus petit entier  $k$  tel que  $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0,9$ .
5. Calculer l'écart-type du nombre de composants défectueux.