

Méthodologie en dénombrement

1 Introduction au dénombrement

Remarque

Le dénombrement consiste à compter le nombre d'éléments d'un ensemble sans avoir à les énumérer un par un. La difficulté principale est de choisir la bonne méthode selon la structure de l'objet à dénombrer.

2 Questions fondamentales

Avant de choisir une méthode, il est essentiel de se poser trois questions :

1. L'ordre est-il important ?

Exemple : Un classement (ordre important) vs un comité (ordre sans importance).

2. Les répétitions sont-elles autorisées ?

Exemple : Un code PIN (répétitions autorisées) vs un tirage sans remise (répétitions interdites).

3. Tous les éléments sont-ils utilisés ?

Exemple : On choisit k éléments parmi n , ou bien on utilise tous les n éléments.

3 Structures fondamentales

Avec ordre (les arrangements)

Définition 3.1

Lorsqu'on choisit k éléments parmi n **avec ordre** et **avec répétition** autorisée, on forme un **k -uplet**.

$$\text{Nombre de } k\text{-uplets} = n^k$$

Exemple (Code PIN)

Un code à 4 chiffres : $10^4 = 10\,000$ possibilités.

Exemple (Mots de passe)

Un mot de passe de 6 caractères avec des lettres minuscules : $26^6 = 308\,915\,776$ possibilités.

Définition 3.2

Lorsqu'on choisit k éléments parmi n **avec ordre** mais **sans répétition**, on forme un **arrangement**.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple (Podium)

Choisir les 3 premiers parmi 10 coureurs : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Exemple (Élections)

Élire un président, un vice-président et un secrétaire parmi 15 candidats : $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2\,730$.

Sans ordre (les combinaisons)

Définition 3.3

Lorsqu'on choisit k éléments parmi n **sans ordre** et **sans répétition**, on forme une **combinaison**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple (Main de poker)

Une main de 5 cartes parmi 52 : $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Exemple (Comité)

Former un comité de 4 personnes parmi 12 : $\binom{12}{4} = 495$.

Définition 3.4: (Pour aller plus loin - Hors programme)

Lorsqu'on choisit k éléments parmi n **sans ordre** mais **avec répétition** autorisée, on forme une **combinaison avec répétition**.

$$\Gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Exemple (Choix de fruits)

Choisir 10 fruits parmi 4 types différents : $\binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$.

Exemple (Lancé de dés)

Nombre de résultats possibles en lançant 9 dés identiques : $\binom{6+9-1}{9} = \binom{14}{9} = 2\,002$.

Exemple (Distribution de bananes)

Distribuer 5 bananes identiques à 3 singes différents : $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$.

4 Cas particuliers importants

Permutations

Définition 4.1

Lorsqu'on range **tous** les n éléments **avec ordre** et **sans répétition**, on forme une **permutation**.

$$\text{Nombre de permutations} = n!$$

Exemple (Anagrammes)

Anagrammes de "ABC" : $3! = 6$ (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA).

Exemple (Placement)

Placer 7 livres différents sur une étagère : $7! = 5\,040$ façons.

Définition 4.2

Lorsqu'on range n éléments dont certains sont identiques (avec k_1, k_2, \dots éléments identiques), on forme une **permutation avec répétitions**.

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$$

Exemple (Anagrammes de "MISSISSIPPI")

$\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$ anagrammes.

- **Exemple (Anagrammes de "BANANE")**
- $\frac{6!}{3!2!} = 60$ anagrammes (3 N, 2 A).

Partitions

Définition 4.3

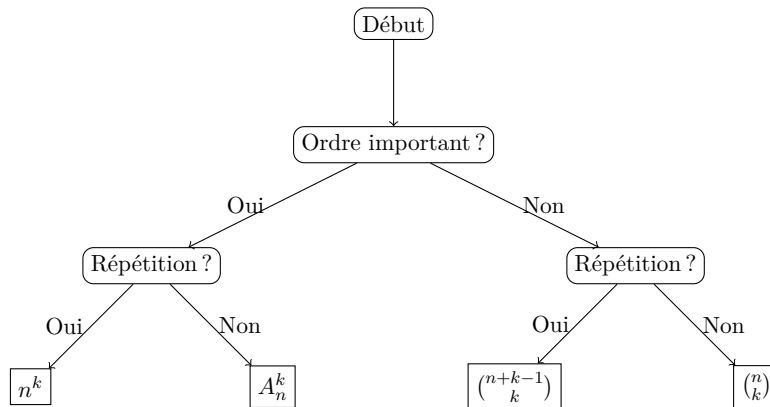
Une **partition** d'un ensemble à n éléments en p parties de tailles fixes n_1, n_2, \dots, n_p est donnée par :

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_p!}$$

- **Exemple (Groupes d'élèves)**
- Répartir 8 élèves en groupes de 3, 3 et 2 : $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$.

- **Exemple (Distribution de cartes)**
- Distribuer 32 cartes à 4 joueurs (8 cartes chacun) : $\frac{32!}{8!8!8!8!}$.

5 Arbre décisionnel



6 Exercices d'application

Exercice 6.1 — Choix de méthodes

Source=Interne ; Niveau=★☆☆

Pour chaque situation, identifier la structure combinatoire et donner la formule à utiliser :

1. Nombre de façons de former un comité de 5 personnes parmi 20.
2. Nombre de mots de 3 lettres avec l'alphabet A,B,C (les répétitions sont autorisées).
3. Nombre de façons d'attribuer les médailles d'or, d'argent et de bronze à 8 athlètes.
4. Nombre de solutions de l'équation $x + y + z = 10$ avec x, y, z entiers naturels.

Corrigé

1. Combinaison sans répétition : $\binom{20}{5}$
2. k -uplet avec répétition : $3^3 = 27$
3. Arrangement sans répétition : $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$
4. Combinaison avec répétition : $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$

Exercice 6.2 — Problèmes combinatoires

Source=Interne; Niveau=★★☆

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "MATHÉMATIQUES" ?
2. Dans une classe de 30 élèves, on veut former une équipe de 4 élèves pour un projet. Combien d'équipes différentes peut-on former ?
3. Un restaurant propose un menu à 15€ avec entrée, plat, dessert. Il y a 3 entrées, 5 plats et 2 desserts. Combien de menus différents peut-on composer ?
4. On dispose de 10 boules numérotées que l'on place dans 3 boîtes distinctes. La première boîte doit contenir 3 boules, la deuxième 4 boules et la troisième 3 boules. Combien de répartitions différentes peut-on avoir ?

Corrigé

1. Permutation avec répétitions : $\frac{12!}{2!2!2!} = 59\,875\,200$ (M, A, T apparaissent chacun 2 fois)
2. Combinaison : $\binom{30}{4} = 27\,405$
3. Principe multiplicatif : $3 \times 5 \times 2 = 30$ menus
4. Partition : $\frac{10!}{3!4!3!} = 12\,600$

Exercice 6.3 — Problème de synthèse

Source=Interne; Niveau=★★★

On dispose d'un groupe de 8 hommes et 6 femmes.

1. Combien de comités de 5 personnes peut-on former ?
2. Combien de comités de 5 personnes avec exactement 3 femmes ?
3. Combien de comités de 5 personnes avec au moins une femme ?
4. On veut former un bureau (président, secrétaire, trésorier) avec 3 personnes différentes. Combien de bureaux peut-on former si le président doit être un homme ?

Corrigé

1. $\binom{14}{5} = 2\,002$
2. $\binom{6}{3} \times \binom{8}{2} = 20 \times 28 = 560$
3. Total moins comités sans femme : $2\,002 - \binom{8}{5} = 2\,002 - 56 = 1\,946$
4. Choix du président parmi les hommes : 8 possibilités, puis arrangement des 2 autres postes parmi 13 personnes : $8 \times A_{13}^2 = 8 \times 156 = 1\,248$