

# Dénombrement

## 1 Introduction au dénombrement

Le dénombrement est une branche des mathématiques qui consiste à compter le nombre d'éléments dans un ensemble sans avoir à les énumérer un par un. Cette discipline est fondamentale en probabilités, en informatique et dans de nombreux domaines des mathématiques.

## 2 Cardinal d'un ensemble

### Définition 2.1

On dit qu'un ensemble  $A$  est **fini** si et seulement s'il contient un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on appelle **cardinal** de  $A$  le nombre d'éléments de  $A$ . On le note  $\text{Card}(A)$ .

### Exemple

Le cardinal d'une classe d'un lycée qui contient 26 élèves est 26.

## Réunion d'ensembles disjoints

### Définition 2.2

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  et  $B$  sont **disjoints** si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

### Propriété 2.1

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ . Soient  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  des ensembles deux à deux disjoints. Alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

### Exemple

Si  $A$  est une classe de première et que  $B$  est une classe de terminale,  $A$  et  $B$  sont disjoints car aucun élève n'appartient aux deux classes à la fois. Dans cette situation  $\text{Card}(A \cap B) = 0$ .

## 3 Produit cartésien

### Définition 3.1

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Le **produit cartésien** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des couples  $(a; b)$  tels que  $a \in A$  et  $b \in B$ . Cet ensemble est noté  $A \times B$  et se lit «  $A$  croix  $B$  ».

$$A \times B = \{(a; b), a \in A, b \in B\}$$

**Remarque** — On peut effectuer le produit  $A \times A$  qui est alors l'ensemble des couples formés à partir des éléments de  $A$ . L'ensemble  $A \times A$  peut se noter  $A^2$ .

- Un élément de  $A \times A$  est un couple de  $A$ .
- Un élément de  $A \times A \times A$  est un triplet de  $A$ .
- Un élément de  $A^n$  est un  $n$ -uplet de  $A$ .

**Propriété 3.1**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Card}(A^n) = (\text{Card}(A))^n$

**Exemple**

Soient  $A = \{1; 2; 3\}$ ,  $B = \{K; L\}$  et  $C = \{6; 5; 4\}$ .

Exemples d'éléments de  $A \times B \times C$  :  $(3; K; 5)$ ,  $(2; K; 6)$  et  $(1; L; 4)$ .

Exemples d'éléments de  $C \times A \times B$  :  $(5; 2; L)$ ,  $(6; 1; K)$  et  $(4; 3; L)$ .

## 4 Nombre de parties d'un ensemble

**Définition 4.1**

Une **partie** d'un ensemble  $A$  est un sous-ensemble de  $A$ , c'est-à-dire un ensemble composé d'éléments de  $A$ .

**Exemple**

Déterminer l'ensemble des parties de  $A$ , avec  $A = \{8; 12; 5\}$ .

L'ensemble  $E$  des parties de  $A$  est :

$$E = \{\emptyset; \{8\}; \{12\}; \{5\}; \{8; 12\}; \{8; 5\}; \{12; 5\}; \{8; 12; 5\}\}$$

**Propriété 4.1**

Soit  $A$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Le nombre de parties de  $A$  est  $2^n$ .

**Remarque**

Pour dénombrer les parties de  $A$ , on passe en revue toutes les parties possibles. Pour chaque élément de  $A$ , il y a deux possibilités : soit il appartient à la partie, soit il n'y appartient pas. Cela revient donc à dénombrer l'ensemble  $\{0; 1\}^n$ . Il y a donc  $2^n$  parties possibles.

## 5 Arrangements et permutations

**Définition 5.1**

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Pour tout entier naturel  $k \leq n$ , on appelle **arrangement de  $k$  éléments de  $A$**  ou  **$k$ -arrangement de  $A$** , tout  $k$ -uplet d'éléments distincts de  $A$ .

Le nombre de  $k$ -arrangements de  $A$  est :

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - (k - 1)) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

**Exemple (Le quinté)**

Nous cherchons à calculer le nombre de quintés possibles lors d'une course de chevaux comptant 12 participants. C'est-à-dire que nous devons compter combien de possibilités de classement il y a pour les cinq premières places.

$$A_{12}^5 = \frac{12!}{(12 - 5)!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$$

**Définition 5.2**

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . On appelle **permutation** de  $A$ , tout  $n$ -arrangement de  $A$ .

Le nombre de permutations de  $A$  est :

$$P_n = n!$$

**Exemple**

Soit  $A = \{1; 2; 3\}$ . Les permutations de  $A$  sont les triplets :

$$(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)$$

Elles sont au nombre de  $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ .

## 6 Combinaisons et coefficients binomiaux

**Définition 6.1**

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Pour tout entier naturel  $k \leq n$ , on appelle **combinaison de  $k$  éléments de  $A$** , toute partie de  $A$  à  $k$  éléments.

Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments de  $A$  est :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Remarque**

À la différence d'un  $k$ -arrangement, une combinaison de  $k$  éléments d'un ensemble  $A$  ne tient pas compte de l'ordre des éléments qui la composent.

Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments d'un ensemble  $A$  est égal au nombre de  $k$ -arrangements de cet ensemble divisé par le nombre de  $k$ -arrangements composés avec les mêmes  $k$  éléments, c'est-à-dire divisé par le nombre de permutations d'un ensemble à  $k$  éléments.

**Exemple (Loterie)**

Nous nous intéressons au nombre de grilles possibles pour une loterie dont le but est de trouver les 5 numéros gagnants parmi 50 numéros (de 1 à 50). L'ordre dans lequel les numéros sont cochés n'a pas d'importance, et un même numéro ne peut pas être coché deux fois sur une même grille.

$$\begin{aligned} \binom{50}{5} &= \frac{50!}{5!(50-5)!} = \frac{50!}{5!45!} \\ &= \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,118\,760 \end{aligned}$$

### Propriétés des coefficients binomiaux

**Propriété 6.1**

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $k \leq n$ .

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



1. Vérifier que  $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$
2. Calculer  $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$  et vérifier que c'est égal à  $\binom{6}{3}$
3. Calculer  $\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k}$

**Exercice 6.5** – Comité

Source=Interne; Niveau=★★★

Dans une classe de 30 élèves, on veut former un comité de 5 élèves.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y a-t-il de comités contenant un élève particulier ?
3. Combien y a-t-il de comités ne contenant pas un élève particulier ?

**Exercice 6.6** – Mots de passe

Source=Interne; Niveau=★★★

On veut créer un mot de passe de 4 caractères avec des lettres majuscules (26 lettres) et des chiffres (10 chiffres).

1. Combien y a-t-il de mots de passe si on peut répéter les caractères ?
2. Combien y a-t-il de mots de passe si on ne peut pas répéter les caractères ?
3. Combien y a-t-il de mots de passe contenant exactement 2 lettres et 2 chiffres (répétition autorisée) ?

**Exercice 6.7** – Main au poker

Source=Interne; Niveau=★★★

On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant exactement 2 cœurs ?
3. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as ?

**Exercice 6.8** – Problème de binôme

Source=Interne; Niveau=★★★

1. Développer  $(a + b)^4$  en utilisant la formule du binôme de Newton
2. Calculer  $\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k}$
3. Trouver  $n$  tel que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 256$

**Exercice 6.9** – Problème de dénombrement avancé

Source=Interne; Niveau=★★★

On considère l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

1. Combien y a-t-il de parties de  $E$  contenant exactement 3 éléments ?
2. Combien y a-t-il de parties de  $E$  contenant un nombre pair d'éléments ?
3. Combien y a-t-il de parties de  $E$  ne contenant pas 1 ni 2 ?

**Exercice 6.10** – Problème synthèse

Source=Interne; Niveau=★★★

Dans un lycée, il y a 20 professeurs. On veut former une commission de 5 personnes.

1. Combien y a-t-il de commissions possibles ?
2. Parmi les 20 professeurs, il y a 12 femmes et 8 hommes. Combien y a-t-il de commissions contenant exactement 3 femmes et 2 hommes ?
3. Combien y a-t-il de commissions contenant au moins un homme ?
4. Combien y a-t-il de commissions contenant au plus 2 femmes ?