Chapitre 1 19 mai 2026

Suites numériques

1 Point histoire

Exemple
Le raisonnement par récurrence apparaît explicitement dans le « Traité du triangle arithmétique » de Blaise PASCAL (1623-1662), écrit en 1654. Ce type de raisonnement avait déjà été partiellement introduit par d'autres mathématiciens avant lui. La formalisation rigoureuse n'est faite que plus tard par le mathématicien Henri POINCARÉ (1854-1912).
Les limites de suites interviennent dans les paradoxes de Zénon datant de -450, dans lesquels il essaie de montrer que le mouvement est impossible. Il faut attendre le XIXème siècle et le mathématicien Karl WEIERSTRASS (1815-1897) pour voir naître la définition rigoureuse.

2 Raisonnement par récurrence

Principe

Définition 2.1

Soit une proposition P_n définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si :

- P_{n_0} est vraie (initialisation)
- Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (hérédité)

Alors la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Remarque
On peut comparer ce principe à une file de dominos : si le premier domino tombe, et si chaque domino qui tombe fait tomber le suivant, alors tous les dominos tombent.

Exemple (Rédaction type)
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ avec $u_0 = 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
Initialisation : $u_0 = 0$, or $0 \leqslant 0 \leqslant 3$, donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
$0 \leqslant u_n \leqslant 3$ donc $6 \leqslant u_n + 6 \leqslant 9$
donc $\sqrt{6} \leqslant \sqrt{u_n + 6} \leqslant \sqrt{9}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $\sqrt{6} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$
donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ car $0 \leqslant \sqrt{6}$
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3 Limites de suites

Limite finie

Définition 3.1

Soient (u_n) une suite et ℓ un nombre réel.
Lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, on dit que u_n tend vers ℓ, et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

On dit également que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Définition 3.2

Une suite est **convergente** si et seulement si elle admet une limite finie.
Une suite est **divergente** si et seulement si elle ne converge pas.

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{1}{n}\right) = 4$$

Limite infinie

Définition 3.3

- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} 3n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (-4n+3) = -\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 8n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (-\pi n^3 + \sqrt{2}) = -\infty$$

Suites sans limite

Exemple
Les suites suivantes n'ont pas de limite :

- $u_n = (-1)^n$: alterne entre 1 et -1
- $v_n = 3\cos(n\pi)$: alterne entre 3 et -3

Remarque
Les suites qui n'ont pas de limite sont divergentes.

4 Opérations sur les limites

Règles de calcul

Propriété 4.1

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	∞	$-\infty$	$+\infty$	FI

Propriété 4.2

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Lever les formes indéterminées

Propriété 4.3

Pour lever une forme indéterminée de type polynôme, on factorise par le terme de plus haut degré.

Exemple

Soit $u_n = 2n^3 - n^2 - n + 1$.
Pour $n \neq 0$: $u_n = n^3\left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 2$
Et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Propriété 4.4

Pour les fractions rationnelles, on factorise numérateur et dénominateur par le terme de plus haut degré.

Propriété 4.5

Pour les expressions avec racines carrées dans une soustraction, on utilise la quantité conjuguée.

Exemple

Soit $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$, avec $n \in N$.
$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+1}+n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

5 Théorèmes de comparaison

Théorème de comparaison

Théorème 5.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ (théorème de minoration)
- Si $\lim\limits_{n \to \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to \to +\infty} u_n = -\infty$ (théorème de majoration)

Théorème des gendarmes

Théorème 5.2

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers un réel ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Exemple

Soit $u_n = 2 + \frac{\cos(n)}{n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$
donc $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$
donc $2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

6 Suite (q^n) et convergence des suites monotones

Comportement de (q^n)

Théorème 6.1

Soit q un réel non nul.

- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Convergence des suites monotones

Théorème 6.2

- Toute suite réelle, croissante et majorée par un réel M, converge vers un réel $\ell \leqslant M$
- Toute suite réelle, décroissante et minorée par un réel N, converge vers un réel $\ell \geqslant N$
- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

Remarque
Ce théorème donne l'existence de la limite, mais ne détermine pas sa valeur.