Chapitre 0 01 Novembre 2025

Raisonnement logique et vocabulaire ensembliste

1 Introduction

Bien raisonner et bien rédiger sont deux compétences fondamentales en mathématiques. Comme le disait le mathématicien Georg Cantor : « L'essence des mathématiques réside dans leur liberté. » Cette liberté s'exprime à travers une rigueur logique et une clarté de rédaction qui permettent de construire des démonstrations solides et compréhensibles.

2 Les bases du raisonnement

Axiomes, définitions, théorèmes

Définition 2.1

Un **axiome** est une proposition que l'on tient pour vraie sans démonstration, comme point de départ d'une théorie mathématique.

Définition 2.2

Une **définition** est une manière d'accorder un nom à un objet vérifiant une propriété donnée. Elle crée une classe d'objets réunis autour d'un nom commun.

Définition 2.3

Un **théorème** est une proposition démontrée à partir des axiomes et des définitions. On distingue souvent :

— Les **lemmes** : théorèmes préparatoires

— Les **corollaires** : conséquences immédiates

— Les **caractérisations** : conditions équivalentes à une définition

Introduire une variable, donner un nom à un objet

Propriété 2.1

Pour introduire une variable x représentant tous les éléments d'un ensemble E, on écrit :

« Soit $x \in E$ »

Cette introduction est un « acte de naissance » de la variable.

Exemple (Introduction correcte)
Pour dériver $f(x) = xe^x$, on écrit : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x+1)e^x$ » ou bien : « Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = (x+1)e^x$. »

Remarque
La différence entre « Soit » et « On pose/on note » :

— « Soit » introduit une variable indéterminée

— « On pose/on note » donne un nom à un objet spécifique

3 Connecteurs logiques

Négation, conjonction, disjonction

Définition 3.1

- **Négation** : « non p » est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie
- **Conjonction** : « p et q » est vraie si p et q sont vraies toutes les deux
- **Disjonction** : « p ou q » est vraie si l'une au moins des propositions est vraie

Remarque
En mathématiques, le « ou » est toujours **inclusif** : « p ou q » est vraie même quand p et q sont vraies toutes les deux.

Théorème 3.1

- Non(p et q) $\iff$ (non p) ou (non q)
- Non(p ou q) $\iff$ (non p) et (non q)

Exemple
La négation de « $x > 2$ et $x < 5$ » est « $x \leq 2$ ou $x \geq 5$ ».

Implication et équivalence

Définition 3.2

- **Implication** : « $p \implies q$ » est fausse seulement quand p est vraie et q est fausse
- **Équivalence** : « $p \iff q$ » est vraie quand p et q ont la même valeur de vérité

Définition 3.3

- **Réciproque** de « $p \implies q$ » : « $q \implies p$ »
- **Contraposée** de « $p \implies q$ » : « (non q) $\implies$ (non p) »

Théorème 3.2

- Une implication est équivalente à sa contraposée
- Non($p \implies q$) $\iff$ p et (non q)
- $p \iff q \iff (p \implies q)$ et $(q \implies p)$

Exemple
« S'il pleut, alors il y a des nuages » est équivalent à « S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas ».

4 Quantificateurs

Quantificateur universel et existentiel

Définition 4.1

- **Universel** : « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » signifie : tout élément de E vérifie $\mathcal{P}$
- **Existentiel** : « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ » signifie : au moins un élément de E vérifie $\mathcal{P}$
- **Unicité** : « $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ » signifie : il existe un unique élément de E vérifiant $\mathcal{P}$

Exemple — « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est vraie

— « $\exists z \in \mathbb{C}, z^2 = -1$ » est vraie ($z = i$)

— « $\exists! n \in \mathbb{N}, 2n \leq 1$ » est vraie ($n = 0$)

Négation des quantificateurs

Théorème 4.1

— Non($\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$) $\iff$ $\exists x \in E$, non $\mathcal{P}(x)$

— Non($\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$) $\iff$ $\forall x \in E$, non $\mathcal{P}(x)$

Exemple — « Il est faux que tout homme a les yeux bleus » $\iff$ « Certains hommes n'ont pas les yeux bleus »

— « Il est faux que certains hommes ont des cornes » $\iff$ « Tout homme est sans cornes »

Remarque
Pour nier une phrase avec plusieurs quantificateurs, on les remplace tous ($\forall$ devient $\exists$ et $\exists$ devient $\forall$) et on nie la propriété finale.

5 Vocabulaire ensembliste

Appartenance et inclusion

Définition 5.1

— Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**

— $x \in E$ signifie « x appartient à E »

— L'**ensemble vide** $\varnothing$ est l'unique ensemble sans élément

Définition 5.2

— $A \subset B$ signifie : tout élément de A est élément de B

— On dit que A est **inclus** dans B ou que A est une **partie** de B

Remarque
Attention à ne pas confondre **appartenance** $\in$ et **inclusion** $\subset$:

— $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (inclusion)

— $2 \in \mathbb{N}$ (appartenance)

Définition 5.3

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$$

Exemple
$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Opérations sur les ensembles

Définition 5.4

- **Réunion** : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection** : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

Définition 5.5

- **Différence** : $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
- **Complémentaire** : Si $A \subset E$, $\overline{A} = E \setminus A$

Définition 5.6

Le **produit cartésien** de E et F est :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple
$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

Remarque
Attention : $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$ (l'ordre compte dans un couple)

6 Les grands types de raisonnement

Raisonnement par récurrence

Théorème 6.1

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si :

1. $\mathcal{P}_0$ est vraie
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Remarque
Attention aux erreurs fréquentes :

- Ne pas écrire « supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour tout n »
- Ne pas confondre « pour tout n » et « pour un certain n »

Raisonnement par l'absurde

Propriété 6.1

Pour montrer qu'une proposition p est vraie, on suppose que p est fausse et on en déduit une contradiction.

Exemple
Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Alors $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair.
Soit $p = 2k$, alors $2q^2 = 4k^2$ donc $q^2 = 2k^2$, donc q est pair. Contradiction avec $p \wedge q = 1$.

Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode 1 **Raisonner par analyse-synthèse**

Pour déterminer tous les objets vérifiant une propriété :

1. **Analyse** : Si un objet vérifie la propriété, alors il a nécessairement telle forme
2. **Synthèse** : Vérifier que les objets de cette forme vérifient bien la propriété

7 Méthodes de démonstration

Montrer une proposition universelle

Méthode 2 **Montrer une proposition universelle**

Pour montrer que «$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$», on procède ainsi :

— «Soit $x \in E$.»(introduction de la variable x)
— «Montrons que $\mathcal{P}(x)$.»
— Preuve de $\mathcal{P}(x)$

Exemple
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
On a : $x^2 + 1 \geq 2x$ (car $(x-1)^2 \geq 0$), donc $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

Montrer l'existence d'un objet

Méthode 3 **Montrer l'existence d'un objet**

Pour montrer que «$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$»et qu'on a un exemple en tête :

— «Posons $x = \ldots$»
— «Vérifions que $\mathcal{P}(x)$»
— Vérification que x satisfait la propriété $\mathcal{P}$

Exemple
Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, \sqrt{z} > x + y$.
Démonstration : Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Posons $z = (x+y+1)^2$. Alors $z \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{z} = x + y + 1 > x + y$.

Montrer l'unicité d'un objet

Méthode 4 **Montrer l'unicité d'un objet**

Pour montrer qu'un ensemble E contient au plus un élément vérifiant $\mathcal{P}$:

— «Soient $x, x' \in E$»

— «Supposons que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(x')$»

— «Montrons que $x = x'$»

— Preuve que $x = x'$

Exemple

Montrer qu'il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^2 = 1$.

Démonstration :

— **Existence :** Posons $x = 1$. Alors $x \in \mathbb{R}_+$ et $x^2 = 1$.

— **Unicité :** Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$ tels que $x^2 = x'^2 = 1$. Alors $x = x'$ ou $x = -x'$. Mais comme $x, x' \geq 0$, nécessairement $x = x'$.

Montrer une disjonction

Méthode 5 **Montrer une disjonction**

Pour montrer que «p ou q», on peut procéder ainsi :

— «Supposons p fausse»

— «Montrons que q est vraie»

Exemple

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\max\{x^2, (x-2)^2\} \geq 1$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x^2 < 1$ et montrons qu'alors $(x-2)^2 \geq 1$.
Si $x^2 < 1$, alors $-1 < x < 1$, donc $-3 < x - 2 < -1$, et comme la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a $(x-2)^2 \geq 1$.

Montrer une implication

Méthode 6 **Montrer une implication**

Pour montrer que «$p \implies q$», on procède ainsi :

— «Supposons p vraie»

— «Montrons que q est vraie»

Remarque

La flèche d'implication $\implies$ ne signifie pas «donc»et son usage est rare. On préfère utiliser des mots comme «donc», «ainsi», «par conséquent»dans les raisonnements.

Montrer une équivalence

Méthode 7 **Montrer une équivalence**

Pour montrer que «$p \iff q$», deux méthodes :

- **Double implication :**
  - «Supposons p vraie. Montrons que q est vraie.»
  - «Réciproquement, supposons q vraie. Montrons que p est vraie.»
- **Équivalence directe :** «$p \iff \cdots \iff \cdots \iff q$»

Exemple
Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.
Démonstration :

- Si $x = y = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0$.
- Réciproquement, si $x^2 + y^2 = 0$, alors $x^2 = -y^2 \leq 0$, donc $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$, d'où $x = y = 0$.

8 Raisonnement par récurrence (compléments)

Récurrence double

Théorème 8.1

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si :

1. $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}) \implies \mathcal{P}_{n+2}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^n + 3$.
Démonstration :

- **Initialisation :** $u_0 = 4 = 2^0 + 3$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = 2^n + 3$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$.
  Alors $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{n+1} + 3) - 2(2^n + 3) = 3 \cdot 2^{n+1} + 9 - 2^{n+1} - 6 = 2^{n+2} + 3$.

Récurrence forte

Théorème 8.2

Soit $(\mathcal{P}_n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que :

1. $\mathcal{P}_0$ est vraie ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, si les propriétés $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ sont vraies, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire :

$$(\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple
Soit (v_n) une suite réelle telle que $v_0 \geq 0$ et $v_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq 2^n v_0$.
Démonstration :

- **Initialisation :** $v_0 \leq 2^0 v_0 = v_0$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \leq n$, $v_k \leq 2^k v_0$.
  Alors $v_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k v_0 = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} v_0 \leq 2^{n+1} v_0$.

9 Raisonnement par l'absurde (complément)

Exemple
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.
Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{n^2+2}$ est un entier p.
Alors $p^2 = n^2 + 2$, donc $(p-n)(p+n) = 2$.
Les seules décompositions de 2 en produit d'entiers sont 1×2 et 2×1 (et leurs opposés).
Comme $p + n \geq p - n > 0$, on a nécessairement $p - n = 1$ et $p + n = 2$.
En résolvant, on obtient $p = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, ce qui contredit le fait que p et n sont des entiers.

10 Raisonnement par analyse-synthèse (complément)

Exemple
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Démonstration :

- **Analyse :** Soit f une solution. En prenant $y = f(x)$, on obtient :

$$f(0) = 2 - x - f(x)$$

  Donc $f(x) = 2 - x - f(0)$. La fonction f est nécessairement affine : $f(x) = \lambda - x$ avec $\lambda = 2 - f(0)$.
- **Synthèse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction $x \mapsto \lambda - x$. Alors :

$$f(y - f(x)) = f(y - (\lambda - x)) = f(x + y - \lambda) = \lambda - (x + y - \lambda) = 2\lambda - x - y$$

  Pour que ce soit égal à $2 - x - y$ pour tous x, y, il faut $2\lambda = 2$, soit $\lambda = 1$.
  La seule solution est donc $f(x) = 1 - x$.

11 Rédaction avec les fonctions

Propriété 11.1

Pour définir une fonction, on peut utiliser :

- «On note f la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ »
- «On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$»
- «On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sqrt{x}$»

Remarque

— On dit qu'une fonction est définie/monotone/continue/dérivable **sur** un domaine, pas «pour tout x»dans ce domaine.

— On écrit «la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$», pas «la fonction $\sin(x^2)$».