Chapitre 9 9 avril 2026

Géométrie repérée

Introduction

Objectifs du chapitre

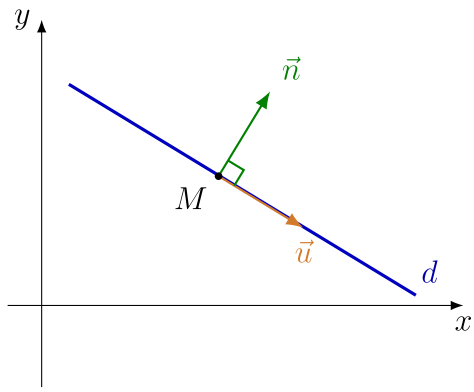
Dans ce chapitre, on étudie plusieurs applications du produit scalaire en **géométrie repérée**. On apprend à déterminer un **vecteur normal** à une droite, à écrire une **équation cartésienne de droite**, à calculer le **projeté orthogonal** d'un point sur une droite et à utiliser ou reconnaître l'**équation cartésienne d'un cercle**.

Compétences visées

- déterminer un vecteur normal à une droite ;
- écrire une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal ;
- calculer les coordonnées d'un projeté orthogonal ;
- reconnaître une équation de cercle par mise sous forme canonique ;
- utiliser ces outils pour traiter des configurations usuelles : hauteur, médiatrice, tangente.

Cadre de travail

Dans tout le chapitre, on travaille dans un **repère orthonormé** $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



1 Vecteur normal à une droite

Définition 1.1: Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à une droite d s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

Propriété 1.1: Lien avec une équation cartésienne

Si une droite d admet une équation cartésienne

$$ax + by + c = 0,$$

alors le vecteur

$$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à la droite d.

Propriété 1.2: Vecteur directeur associé

Si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à une droite, alors un vecteur directeur de cette droite est

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = a(-b) + ba = 0.$$

Méthode 1

Pour déterminer un vecteur normal à une droite, on distingue trois situations classiques.

- Si la droite est donnée par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on lit directement un vecteur normal : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Si la droite est donnée par une équation réduite $y = mx + p$, on la transforme d'abord en équation cartésienne : $mx - y + p = 0$.
- Si la droite passe par deux points A et B, on calcule un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ puis on en déduit un vecteur normal.

Exemple

La droite d'équation $4x - 5y + 2 = 0$ admet pour vecteur normal

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur associé est donc

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1 — Lecture immédiate

Automatisme

Déterminer un vecteur normal à chacune des droites suivantes.

1. $d_1 : 3x - 2y + 7 = 0$
2. $d_2 : y = -4x + 3$
3. $d_3 : y = 5$

Exercice 1.2 — À partir de deux points

Application directe

On considère les points $A(-2\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,1)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire un vecteur normal à la droite (AB).

2 Équation cartésienne d'une droite

Propriété 2.1: Droite définie par un point et un vecteur normal

La droite passant par $A(x_A\,;\,y_A)$ et admettant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a pour équation

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0.$$

En développant, on obtient une équation cartésienne de la forme

$$ax+by+c=0.$$

Méthode 2

Pour écrire une équation cartésienne d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur normal, on peut :

1. écrire directement une équation de la forme $ax+by+c=0$ à partir du vecteur normal, puis utiliser le point connu ;
2. déterminer un vecteur directeur, puis traduire l'appartenance d'un point $M(x;y)$ à la droite par une relation de colinéarité ;
3. traduire l'appartenance d'un point $M(x;y)$ à la droite par une relation d'orthogonalité avec le vecteur normal, puis utiliser le produit scalaire.

Exemple

Déterminons une équation cartésienne de la droite passant par $A(2\,;\,3)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Méthode 1 : à partir du vecteur normal

Comme $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal, la droite a une équation de la forme

$$-2x+y+c=0.$$

Le point $A(2\,;\,3)$ appartient à la droite, donc

$$-2\times 2+3+c=0 \iff -4+3+c=0 \iff c=1.$$

Une équation cartésienne de cette droite est donc

$$-2x+y+1=0.$$

Méthode 2 : à partir d'un vecteur directeur et de la colinéarité

Un vecteur directeur de la droite est un vecteur orthogonal au vecteur normal $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. On peut donc prendre

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

car

$$-2 \times 1 + 1 \times 2 = 0.$$

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. Le point M appartient à la droite si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Or

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M \in (d) \iff \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} x-2 = \alpha \\ y-3 = 2\alpha \end{cases}$$

D'où, en remplaçant α par $x-2$ dans la deuxième équation :

$$y - 3 = 2(x-2).$$

Donc

$$y - 3 = 2x - 4 \iff y = 2x - 1 \iff -2x + y + 1 = 0.$$

Une équation cartésienne de cette droite est donc

$$-2x + y + 1 = 0.$$

Méthode 3 : à partir de l'orthogonalité et du produit scalaire
Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.
Le point M appartient à la droite si et seulement si le vecteur $\vec{AM}$ est orthogonal au vecteur normal $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Or

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M \in (d) \iff \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0.$$

On calcule le produit scalaire :

$$-2(x-2) + 1(y-3) = 0.$$

Donc

$$-2x + 4 + y - 3 = 0 \iff -2x + y + 1 = 0.$$

Une équation cartésienne de cette droite est donc

$$-2x + y + 1 = 0.$$

Remarque
Une même droite possède une infinité d'équations cartésiennes équivalentes. Par exemple,

$$-2x + y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 4x - 2y - 2 = 0$$

représentent la même droite.

Exercice 2.1 — Point et vecteur normal

Méthode de base

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $K(0\,;\,2)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 2.2 — Hauteur et médiatrice

Réinvestissement

Dans un triangle ABC, on suppose que $B(-3\,;\,4)$ et $C(-1\,;\,0)$.

1. Déterminer un vecteur normal à la hauteur issue de A.
2. Déterminer un vecteur normal à la médiatrice de $[BC]$.

3 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 3.1: Projeté orthogonal

Soit A un point du plan et d une droite. Le **projeté orthogonal** de A sur d est le point H de d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à d.

Méthode 3

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur une droite d :

1. on détermine un vecteur normal à d;
2. on écrit l'équation de la droite d' perpendiculaire à d et passant par A;
3. on résout le système formé par les équations de d et d' ;
4. le point d'intersection obtenu est le projeté orthogonal recherché.

Exemple

On considère la droite d d'équation $4x - 5y - 1 = 0$ et le point $A(-1\,;\,2)$.

Un vecteur normal à d est $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$. La droite perpendiculaire à d passant par A a donc pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ et pour équation cartésienne

$$-5x - 4y + c = 0.$$

Comme elle passe par $A(-1\,;\,2)$, ses coordonnées vérifient cette équation, donc

$$-5(-1) - 4 \times 2 + c = 0 \iff 5 - 8 + c = 0 \iff c = 3.$$

Ainsi,

$$d' : -5x - 4y + 3 = 0.$$

Le projeté orthogonal H est le point d'intersection de d et de d', donc ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -5x - 4y = -3 \end{cases}$$

Résolvons ce système par combinaison :

$$4 \times (4x - 5y = 1) \iff 16x - 20y = 4,$$
$$5 \times (-5x - 4y = -3) \iff -25x - 20y = -15.$$

En soustrayant la deuxième égalité de la première, on obtient

$$41x = 19 \iff x = \frac{19}{41}.$$

On remplace ensuite dans la première équation :

$$4 \times \frac{19}{41} - 5y = 1 \iff \frac{76}{41} - 5y = 1 \iff -5y = -\frac{35}{41} \iff y = \frac{7}{41}.$$

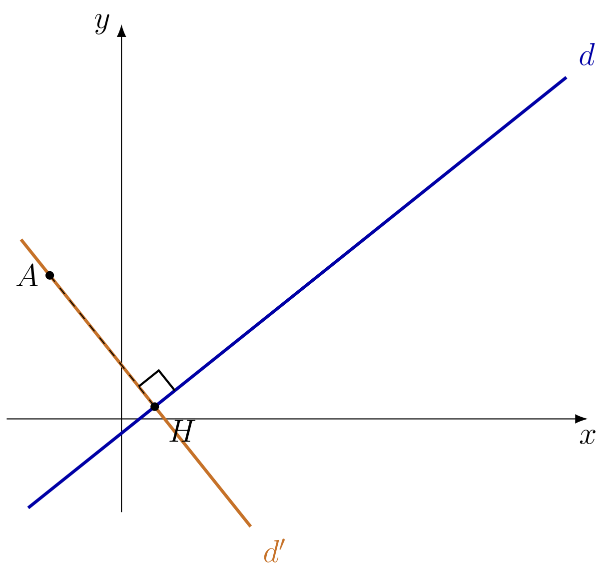
Donc

$$H(\frac{19}{41} ; \frac{7}{41}).$$

Vérification :

$$4 \times \frac{19}{41} - 5 \times \frac{7}{41} - 1 = 0,$$

et donc H appartient bien à la droite d.



Exercice 3.1 — Projeté orthogonal

Application

On considère la droite $d : 2x - y + 4 = 0$ et le point $B(3 ; -4)$.

1. Donner un vecteur normal à d.
2. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à d passant par B.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur d.

4 Équation cartésienne d'un cercle

Propriété 4.1: Forme canonique d'un cercle

Le cercle de centre $A(a\,;\,b)$ et de rayon $r > 0$ admet pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Méthode 4

Pour reconnaître une équation de cercle, on cherche à transformer l'équation initiale en somme de deux carrés :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

On complète donc les carrés sur x et sur y.

Exemple

Étudions l'ensemble des points vérifiant

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0.$$

On complète les carrés :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 2y &= 0 \\ (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 5. \end{aligned}$$

L'ensemble est donc un cercle de centre $C(2\,;\,-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Remarque

Si, après mise sous forme canonique, on obtient

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$$

alors :

- si $k < 0$, il n'existe **aucun point** vérifiant l'équation : l'ensemble est vide ;
- si $k = 0$, l'ensemble est réduit au seul point $(a\,;\,b)$;
- si $k > 0$, l'ensemble est un cercle de centre $(a\,;\,b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

Exercice 4.1 — Reconnaître un cercle

Mise sous forme canonique

Déterminer la nature de l'ensemble des points vérifiant chacune des équations suivantes.

1. $x^2 + 2x + y^2 - 8y = 17$
2. $x^2 + 6x + y^2 + 9 = 0$

Exercice 4.2 — Tangente à un cercle

Lien droite-cercle

On considère le cercle de centre $A(2\,;\,1)$ et de rayon 2.

1. Donner une équation cartésienne de ce cercle.

2. Vérifier que le point $H(2\,;\,3)$ appartient au cercle.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle en H.

5 Bilan de méthodes et synthèse

À retenir

- **Droite** $ax+by+c=0$: un vecteur normal est $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- **Droite passant par** $A(x_A\,;\,y_A)$ **et de vecteur normal** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0.$$

- **Projeté orthogonal** : on construit la perpendiculaire passant par le point donné, puis on résout un système.
- **Cercle de centre** $A(a\,;\,b)$ **et de rayon** r :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

- **Tangente à un cercle en un point** : elle est perpendiculaire au rayon passant par ce point.

6 Liste de 21 exercices à difficulté croissante

Les exercices suivants sont classés du plus simple au plus exigeant.

Niveau 1 – Automatismes

Exercice 1 — Vecteur normal

Automatisme

Déterminer un vecteur normal à la droite d'équation $5x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 2 — Équation réduite

Automatisme

Déterminer un vecteur normal à la droite d'équation réduite $y = 2x - 7$.

Exercice 3 — Vecteur directeur

Automatisme

Déterminer un vecteur directeur de la droite d'équation $-3x + 4y - 9 = 0$.

Exercice 4 — Deux points

Automatisme

On considère $A(1\,;\,-2)$ et $B(5\,;\,1)$. Calculer $\overrightarrow{AB}$ puis donner un vecteur normal à la droite (AB).

Exercice 5 — Point et vecteur normal

Application directe

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $M(2\,;\,-1)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 6 — Droite horizontale

Application directe

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $P(-4\,;\,3)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Niveau 2 – Applications directes

Exercice 7 — Droite perpendiculaire

Application

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(0\,;\,2)$ et perpendiculaire à la droite $3x + y - 4 = 0$.

Exercice 8 — Droite parallèle

Application

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $B(-1\,;\,4)$ et parallèle à la droite $2x - 5y + 7 = 0$.

Exercice 9 — Hauteur d'un triangle

Réinvestissement

Dans un triangle ABC, on donne $B(2\,;\,3)$ et $C(-2\,;\,1)$. Déterminer une équation de la hauteur issue de $A(1\,;\,-1)$.

Exercice 10 — Médiatrice

Réinvestissement

Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[UV]$ avec $U(-3\,;\,2)$ et $V(1\,;\,4)$.

Exercice 11 — Projeté orthogonal 1

Application

On considère la droite d : $3x + y - 4 = 0$ et le point $B(2\,;\,-3)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur d.

Exercice 12 — Projeté orthogonal 2

Application

On considère la droite d : $-2x + 3y + 3 = 0$ et le point $N(-4\,;\,-1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de N sur d.

Exercice 13 — Projeté orthogonal 3

Application

On considère la droite d : $y = 3x - 1$ et le point $D(-2\,;\,1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de D sur d.

Exercice 14 — Projeté orthogonal 4

Application

On considère la droite d : $7x - 3y + 1 = 0$ et le point $G(9\,;\,2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de G sur d.

Niveau 3 – Cercles et synthèse

Exercice 15 — Équation de cercle

Automatisme

Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(1\,;\,-2)$ et de rayon 3.

Exercice 16 — Centre et rayon

Automatisme

Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Exercice 17 — Mise sous forme canonique

Méthode

Montrer que l'équation $x^2 - 3x + y^2 + 5y - 1 = 0$ est celle d'un cercle, puis préciser son centre et son rayon.

Exercice 18 — Nature d'un ensemble

Réflexion

Déterminer la nature de l'ensemble des points vérifiant $x^2 + y^2 - 6y + 12 = 0$.

Exercice 19 — Intersection avec un axe

Application

Déterminer les points d'intersection du cercle $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 20 — Tangente en un point

Réinvestissement

On considère le cercle de centre $C(2\,;\,1)$ et de rayon 2, ainsi que le point $H(2\,;\,3)$. Déterminer une équation de la tangente au cercle en H.

Exercice 21 — Vérifier une tangence

Réinvestissement

On considère le cercle $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 32$ et la droite $d : y = x + 9$. Vérifier que d est tangente au cercle.

Exercice 22 — Synthèse droite et projeté

Synthèse

On considère les points $A(5\,;\,0)$, $B(-2\,;\,2)$ et $C(-3\,;\,-4)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) puis les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB).

Niveau 4 – Approfondissement

Exercice 23 — Droite et cercle

Approfondissement

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2\,;\,1)$ et de rayon 2, ainsi que la droite $d : x - y + 1 = 0$. Étudier le nombre de points d'intersection entre d et $\mathcal{C}$.

Exercice 24 — Projeté puis cercle

Approfondissement

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne $M(-2\,;\,-1)$ et la droite $d : x + 2y - 1 = 0$. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur d, puis donner une équation du cercle de centre M passant par H.

Conclusion

La géométrie repérée permet de traduire des problèmes géométriques en calculs algébriques. Savoir passer d'une figure à une équation, puis d'une équation à une interprétation géométrique, constitue une compétence centrale pour la suite du programme.