

Produit scalaire dans le plan

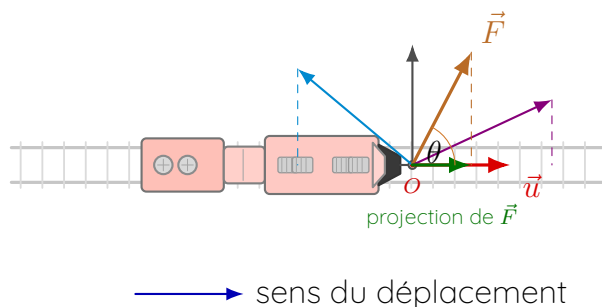
Introduction

Objectifs du chapitre

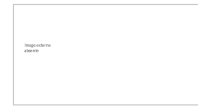
Dans ce chapitre, on introduit une nouvelle opération entre vecteurs : le **produit scalaire**. Cette opération permet de relier géométrie et calcul. Elle sert à mesurer l'efficacité d'une force, à déterminer des angles, à démontrer des perpendicularités, à calculer des longueurs et à étudier certains ensembles de points.

Situation d'ouverture : un train tiré par une corde

Imaginons un petit train que l'on tire à l'aide d'une corde. Si l'on tire exactement dans le sens du déplacement, l'effort est maximal. Si l'on tire en biais, seule une partie de la force agit vraiment dans la direction du mouvement. Si l'on tire perpendiculairement au déplacement, l'effort utile devient nul. Le produit scalaire sert précisément à quantifier cette idée.



Vidéo d'introduction



Scannez ce QR code pour retrouver la vidéo sur le train tiré par une corde.

Remarque

Cette idée d'“effort utile” sera traduite plus loin par la formule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Lorsque l'angle vaut 90° , le cosinus vaut 0 : l'action dans la direction considérée est nulle.

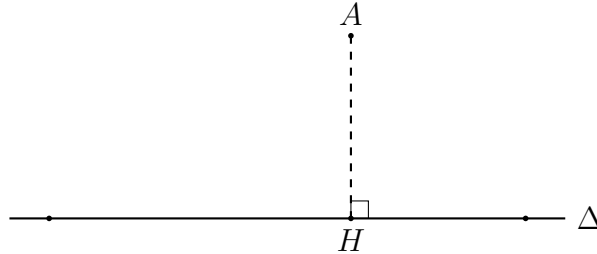
Plan du chapitre

- Définition du produit scalaire par projection.
- Définition à l'aide d'un angle et du cosinus.
- Expression du produit scalaire avec les normes.
- Formule analytique dans un repère orthonormé.
- Applications : orthogonalité, longueurs, angle, formule d'Al-Kashi et ensembles de points.

1 Première approche : projection et sens géométrique

Définition 1.1: Projeté orthogonal d'un point

Soit A un point du plan et Δ une droite. Le **projeté orthogonal** de A sur Δ est le point d'intersection de Δ avec la droite passant par A et perpendiculaire à Δ .



Définition 1.2: Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs colinéaires.

- S'ils sont de même sens, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

- S'ils sont de sens contraires, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Définition 1.3: Produit scalaire par projection

Soient A, B, C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Le produit scalaire de \vec{AB} et \vec{AC} est donné par

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}.$$

Autrement dit, on remplace le vecteur \vec{AC} par sa **projection orthogonale** sur la droite portée par \vec{AB} .

Propriété 1.1: Lecture géométrique

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$

si \vec{AB} et \vec{AH} sont de même sens, et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$$

si \vec{AB} et \vec{AH} sont de sens contraires.

Exemple

Dans un rectangle $ABCD$ de dimensions $AB = 6$ et $AD = 4$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AB = 36.$$

En effet, le projeté orthogonal de C sur (AB) est le point B .

Méthode 1

Pour calculer un produit scalaire par projection :

1. choisir la droite qui porte l'un des deux vecteurs;
2. projeter l'extrémité de l'autre vecteur sur cette droite;
3. lire la longueur projetée et son signe;
4. multiplier par la longueur du vecteur support.

Exercice 1.1 – Calcul par projection

Dans un carré $ABCD$ de côté 6 et de centre O , calculer :

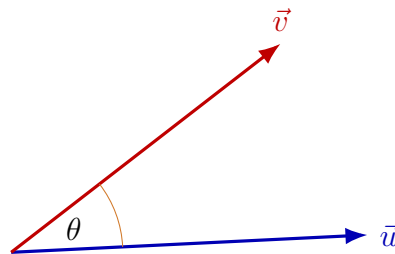
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO}.$$

2 Définition avec un angle**Définition 2.1: Produit scalaire et cosinus**

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 0.

**Propriété 2.1: Cas particuliers**

- Si \vec{u} et \vec{v} sont de même sens, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

- S'ils sont de sens contraires, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

- S'ils sont perpendiculaires, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Propriété 2.2: Propriétés algébriques

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ du plan et pour tout réel k ,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ (k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}), \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$

Propriété 2.3: Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemple

Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4.$$

Exercice 2.1 – Calcul avec un angle

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer l'angle entre deux vecteurs de normes 6 et 2 dont le produit scalaire vaut -6 .

3 Produit scalaire et normes

Propriété 3.1: Formules avec les normes

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

et aussi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

On en déduit enfin l'identité utile

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Propriété 3.2: Norme d'une somme

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} ,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Remarque

Ces formules sont très utiles quand on connaît des longueurs mais pas directement l'angle entre deux vecteurs.

Exemple

Si $AB = 5$, $AC = 4$ et $BC = 7$, alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(25 + 16 - 49) = -4.$$

Propriété 3.3: Formule d'Al-Kashi

Dans tout triangle ABC ,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

soit encore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Exemple

Dans un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 50^\circ$,

$$BC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \cos 50^\circ = 80 - 64 \cos 50^\circ.$$

Donc $BC \approx 6,23$.

Exercice 3.1 – Normes et longueur

1. Montrer que pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

2. Dans un triangle DEF , on a $EF = 5$, $DF = 6$ et $\widehat{EFD} = 70^\circ$. Déterminer DE .

4 Expression analytique dans un repère orthonormé

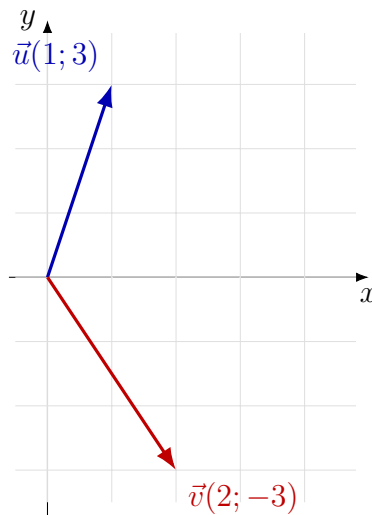
Définition 4.1: Formule analytique

Dans un repère **orthonormé**, si

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$



Exemple

Avec les coordonnées précédentes,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 3 \times (-3) = -7.$$

Propriété 4.1: Condition d'orthogonalité dans un repère orthonormé

Si

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0.$$

Propriété 4.2: Calcul d'un angle avec les coordonnées

Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, alors

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Exercice 4.1 – Coordonnées et orthogonalité

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(-3; 2)$ et $C(0; 3)$ dans un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?

5 Applications géométriques

Longueurs et angles

Méthode 2

Pour calculer une longueur ou un angle, on choisit l'outil le plus efficace :

- **projection** si une figure simple permet de lire une composante ;
- **angle et cosinus** si l'on connaît les normes et l'angle ;

- **coordonnées** si les vecteurs sont donnés dans un repère ;
- **Al-Kashi** si l'on travaille dans un triangle quelconque.

Ensembles de points

Propriété 5.1: Transformation d'une expression

Soient A et B deux points, et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan,

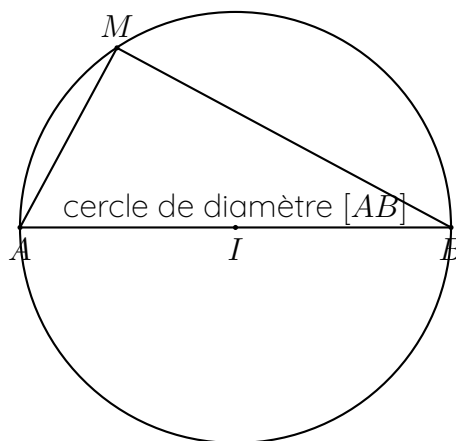
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$

Propriété 5.2: Cercle de diamètre $[AB]$

L'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

est le cercle de diamètre $[AB]$.



Exemple

Soit $[AB]$ un segment du plan tel que $AB = 8$ et soit I son milieu.

Chercher l'ensemble des point M du plan vérifiant la condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$ revient (d'après la propriété 5.2) à chercher les points M vérifiant :

$$MI^2 - \frac{1}{4} \times 8^2 = 2.$$

Donc $MI^2 = 18$ et l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Exercice 5.1 — Ensemble de points

Soit un segment $[PQ]$ de longueur 10 et R son milieu. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -8.$$

6 Synthèse des formules à connaître

Outil	Formule essentielle
Projection	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ ou $-AB \times AH$ selon le sens.
Angle	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Normes	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2)$.
Coordonnées	Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
Al-Kashi	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
Ensemble de points	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ avec I milieu de $[AB]$.

Exercice 6.1 – Bilan rapide

- Dans un triangle équilatéral de côté 6, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- Avec $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(-1; -4)$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Dans un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$, déterminer BC .
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Liste d'exercices progressifs issus du manuel scolaire

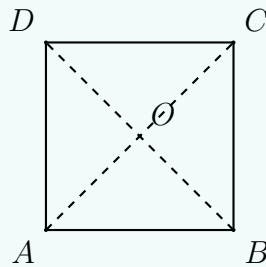
Exercice 1 — Colinéarité, adapté du manuel

Sur une droite graduée, trois points A, B, C sont alignés dans cet ordre avec $AB = 2$ et $AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Exercice 2 — Projection dans un carré, adapté de l'ex. 31

On considère un carré $ABCD$ de côté 8 et de centre O . Calculer :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}.$$



Exercice 3 — Projection dans un rectangle, adapté de l'ex. 1 p. 230

Dans un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ et $AD = 4$, calculer

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

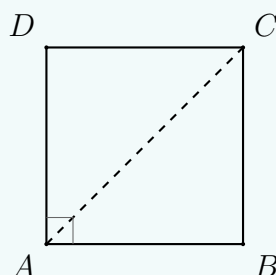


Exercice 4 — Angle connu, adapté de l'ex. 34

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 5 — Angle remarquable, adapté de l'ex. 36

Dans un carré $ABCD$ de côté 5, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Exercice 6 — Retrouver un angle, adapté de l'ex. 38

On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. Déterminer une mesure en degrés de l'angle entre \vec{u} et \vec{v} .

Exercice 7 — Produit scalaire avec des coordonnées, adapté de l'ex. 43

Soient

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{w} \cdot \vec{v}, \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Exercice 8 — Orthogonalité, adapté de l'ex. 46

Montrer que les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

sont orthogonaux.

Exercice 9 — Triangle rectangle ?, adapté de l'ex. 13

Le triangle ABC où $A(0; -2)$, $B(-1; 1)$ et $C(2; 2)$ est-il rectangle ?

Exercice 10 — Longueur par Al-Kashi, adapté de l'ex. 52

On considère un triangle ABC tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Déterminer BC .

Exercice 11 — Angle par Al-Kashi, adapté de l'ex. 54

Dans un triangle EFG , on a $EF = 7$, $FG = 6$ et $EG = 11$. Déterminer l'angle \widehat{EFG} , arrondi à $0,1^\circ$.

Exercice 12 — Propriété algébrique, adapté de l'ex. 56

Soient \vec{u} et \vec{v} orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = a$ et $\|\vec{v}\| = b$. Exprimer en fonction de a et b :

$$(\vec{u} + \vec{u}) \cdot \vec{v}, \quad (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{v}, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2.$$

Exercice 13 — Relation de Chasles, adapté de l'ex. 58

Montrer que pour tous points A, B, C, D, E du plan,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}.$$

Exercice 14 — Ensemble de points, adapté de l'ex. 59

On donne deux points A et B tels que $AB = 12$ et I le milieu de $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4.$$

Exercice 15 — Ensemble de points nul, adapté de l'ex. 61

On considère les points $A(-2; -3)$ et $B(-1; 4)$.

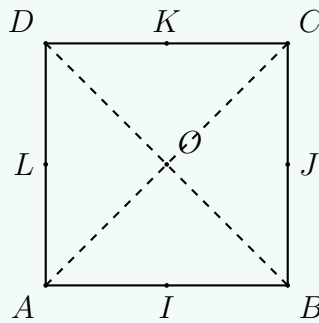
- Calculer la longueur AB .

- Déterminer le milieu I de $[AB]$.
- Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice 16 – Carré et milieux, adapté de l'ex. 64

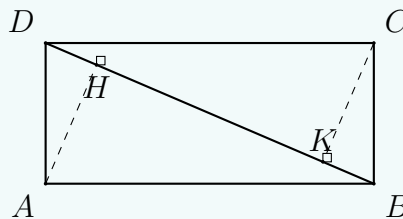
Dans un carré $ABCD$ de côté 4 et de centre O , on place les milieux I, J, K, L de $[AB], [BC], [CD], [AD]$. Calculer :

$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CK}, \quad \overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{LJ}, \quad \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KL}.$$



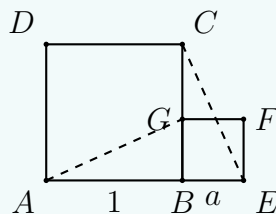
Exercice 17 – Rectangle et diagonale, adapté de l'ex. 70

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 7$ et $AD = 3$. Les points H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la diagonale (BD) . En calculant de deux manières $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$, déterminer la longueur HK .



Exercice 18 – Deux carrés, adapté de l'ex. 73

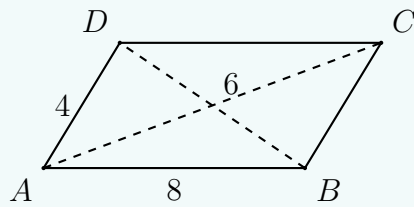
On considère deux carrés $ABCD$ et $BEFG$ disposés comme dans le manuel, avec $AB = 1$ et $BE = a$. Montrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.



Exercice 19 – Dans un parallélogramme, adapté de l'ex. 102

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 8$, $AD = 4$ et $AC = 6$.

- Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -22$.
- En déduire la longueur BD .

**Exercice 20** — Pied de hauteur, adapté de l'ex. 97

On considère les points $A(4; -1)$, $B(-3; -1)$ et $C(-1; 3)$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
2. En appelant H le projeté orthogonal de C sur (AB) , en déduire la longueur AH , puis donner une valeur approchée de l'angle \widehat{BAC} .