Chapitre 7 8 mars 2026

Fonctions trigonométriques

Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre introduit les fonctions trigonométriques à partir du cercle trigonométrique. On relie un nombre réel à un point du cercle, puis on définit le cosinus et le sinus comme les coordonnées de ce point. L'étude conduit ensuite aux valeurs remarquables, aux angles associés, aux courbes représentatives, à la parité et à la périodicité.

Attendus du programme

- Connaître le cercle trigonométrique, la longueur d'arc et la mesure en radian.
- Comprendre l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique et la notion de point-image d'un réel.
- Relier les coordonnées d'un point du cercle au cosinus et au sinus d'un nombre réel.
- Déterminer les valeurs remarquables et relier ces résultats au sinus et au cosinus dans un triangle rectangle.
- Lire et interpréter les courbes des fonctions cosinus et sinus ; utiliser leur parité et leur périodicité.
- Découvrir un exemple d'algorithme d'approximation de π par la méthode d'Archimède.

1 Repérage sur le cercle trigonométrique

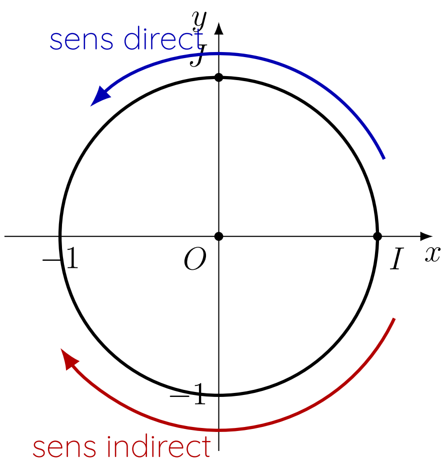
Définition 1.1: Cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\mathcal{C} = \{M \mid OM = 1\}.$$

Propriété 1.1: Orientation

Sur le cercle trigonométrique, le **sens direct** est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Le **sens indirect** est le sens des aiguilles d'une montre.



Remarque

Le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π. Cette longueur jouera un rôle essentiel pour comprendre pourquoi plusieurs réels peuvent avoir le même point-image.

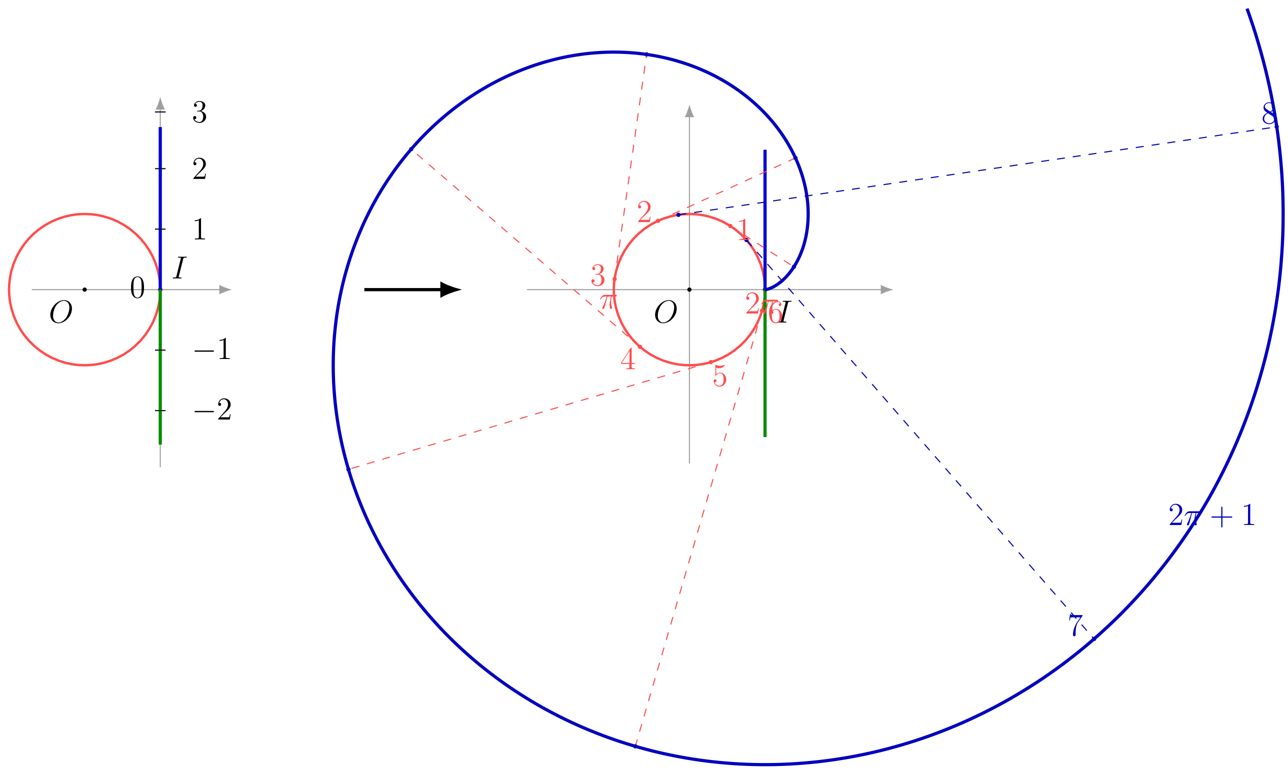
Exercice 1.1 — Repérer des points

Placer sur un cercle trigonométrique les points-images des réels 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π. Que remarque-t-on pour 0 et 2π ?

Enroulement de la droite des réels

Propriété 1.2: Point-image d'un réel

On enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique à partir du point I. À tout réel x, on associe alors un point du cercle, appelé **point-image** de x et noté M_x.



Remarque
Deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π ont le même point-image. Ainsi, pour tout entier k,

$$M_{x+2k\pi} = M_x.$$

En particulier, 0, 2π, 4π, -2π ont tous pour image le point I.

Définition 1.2: Radian

Soit M un point du cercle trigonométrique. La mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ est la longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$ intercepté par cet angle.

Exemple
Comme le cercle trigonométrique a pour rayon 1, un tour complet correspond à une longueur d'arc égale à 2π. On obtient donc

$$360° = 2\pi \text{ rad}, \qquad 180° = \pi \text{ rad}, \qquad 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Angle en degrés	$30°$	$45°$	$60°$
Mesure en radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Exercice 1.2 — Enroulement et radian

1. Donner le point-image de $\frac{5\pi}{2}$, puis celui de $-\frac{3\pi}{2}$.
2. Convertir en radians : $30°$, $135°$, $270°$.
3. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$.

2 Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

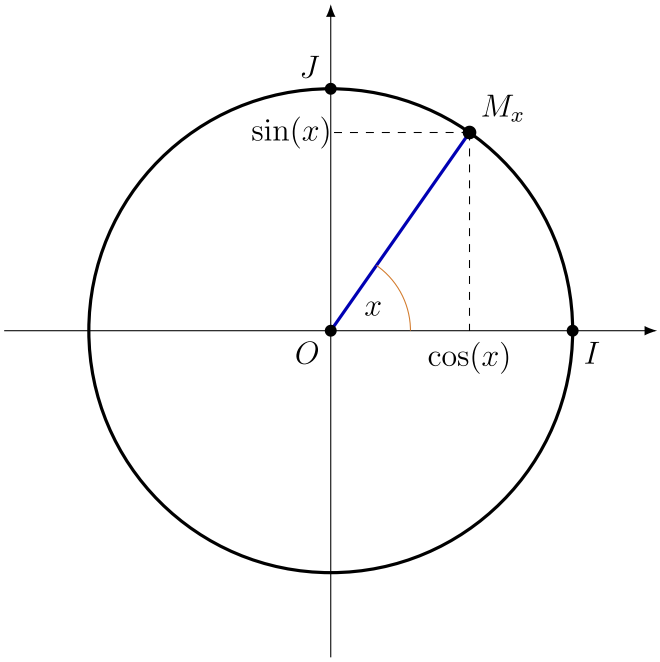
Cosinus et sinus d'un réel

Définition 2.1: Sinus et cosinus

Pour tout réel x, si M_x est le point-image de x sur le cercle trigonométrique, alors les coordonnées de M_x sont

$$M_x\big(\cos(x); \sin(x)\big).$$

Le **cosinus** de x est donc l'abscisse du point-image et le **sinus** de x est son ordonnée.



Propriété 2.1: Relation fondamentale

Pour tout réel x,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

De plus,

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Exemple

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ces égalités se lisent directement sur le cercle trigonométrique : le point-image de 0 est $I(1;0)$, celui de $\frac{\pi}{2}$ est $J(0;1)$.

Exercice 2.1 — Coordonnées sur le cercle

Déterminer les coordonnées des points-images des réels suivants :

$$0, \qquad \pi, \qquad -\frac{\pi}{2}, \qquad 2\pi.$$

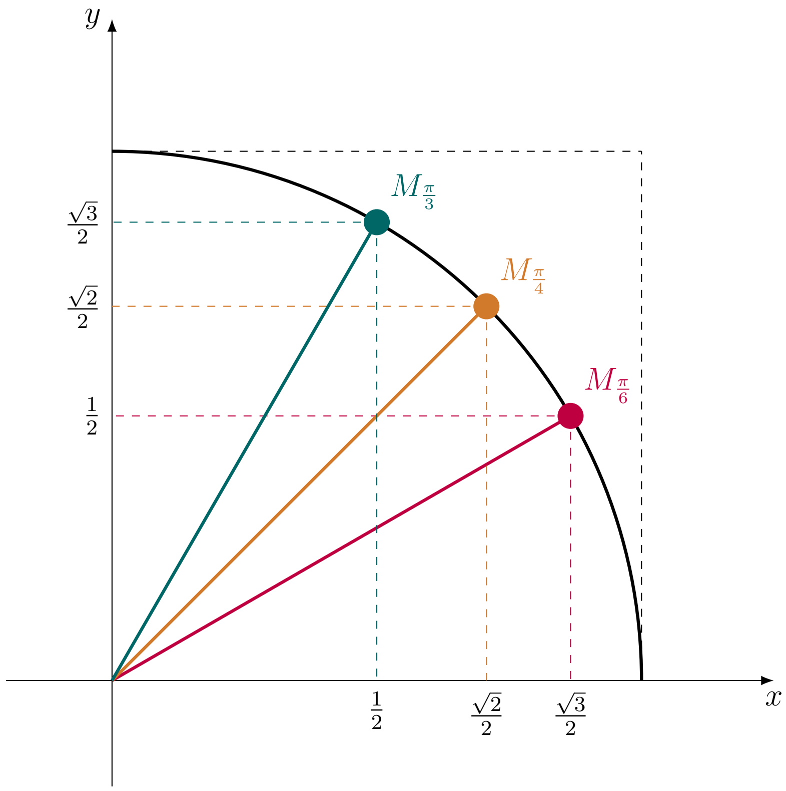
Puis vérifier dans chaque cas la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Valeurs remarquables

Propriété 2.2: Valeurs remarquables

Les principales valeurs remarquables sont données dans le tableau suivant.

Angle	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Réel associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Remarque
Pour retenir le tableau, on peut lire les valeurs dans le premier quart du cercle puis utiliser les symétries pour retrouver les autres cas.

Exercice 2.2 — Valeurs remarquables

Compléter sans calculatrice :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Puis ranger ces quatre nombres dans l'ordre croissant.

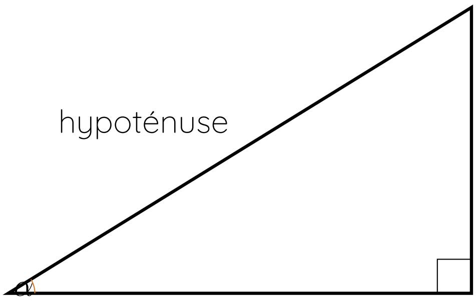
Lien avec le triangle rectangle

Propriété 2.3: Triangle rectangle

Soit α un angle aigu d'un triangle rectangle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Dans le cercle trigonométrique, lorsque l'on se place dans le premier quart de cercle, ces rapports coïncident avec les coordonnées du point-image de α.



Exemple

Dans un triangle rectangle isocèle de côté 1, l'hypoténuse vaut $\sqrt{2}$. Pour un angle aigu de $45°$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dans un triangle équilatéral de côté 2, on retrouve de même

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2.3 — Lien cercle / triangle

Dans un triangle rectangle, un angle aigu mesure $30°$.

1. Donner la valeur de son sinus et de son cosinus.
2. Si l'hypoténuse mesure 10, calculer la longueur du côté opposé puis celle du côté adjacent à cet angle.

Angles associés

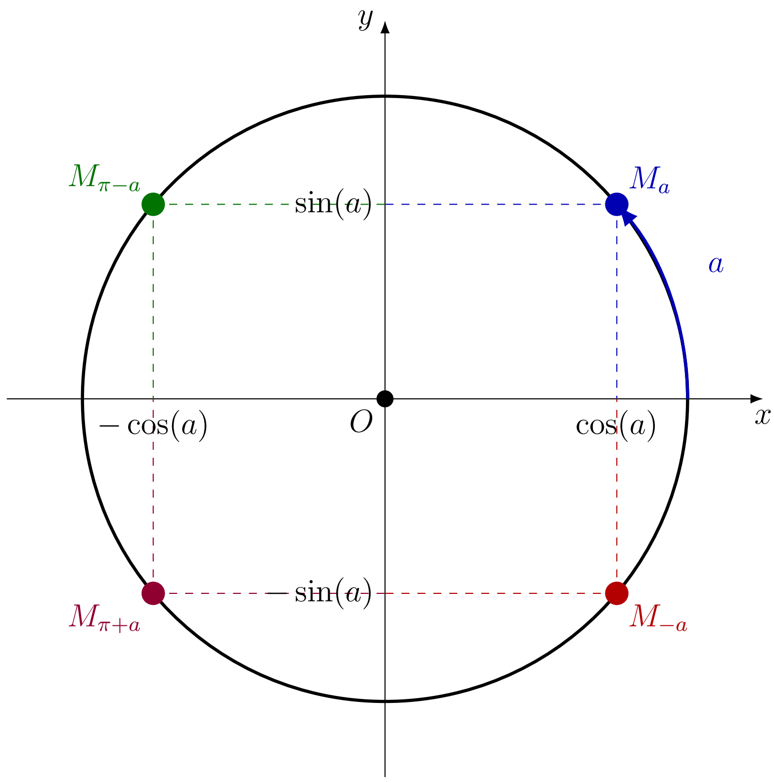
Propriété 2.4: Formules d'angles associés

Pour tout réel a,

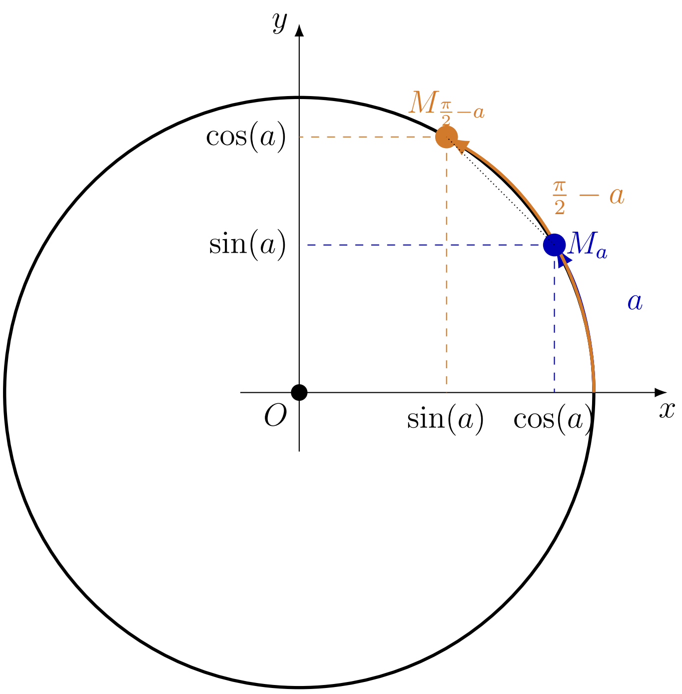
$$\begin{aligned}
\cos(-a) &= \cos(a), & \sin(-a) &= -\sin(a),\\
\cos(\pi - a) &= -\cos(a), & \sin(\pi - a) &= \sin(a),\\
\cos(\pi + a) &= -\cos(a), & \sin(\pi + a) &= -\sin(a),\\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin(a), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos(a).
\end{aligned}$$

Remarque

Ces égalités proviennent des symétries du cercle trigonométrique : symétrie par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées, à l'origine ou encore à la droite $y = x$ dans le premier quart de cercle.



Les points-images de $-a$, $\pi - a$ et $\pi + a$ se déduisent de M_a par symétries, ce qui explique directement les signes de $\cos$ et de $\sin$.



Dans le premier quadrant, passer de a à $\frac{\pi}{2} - a$ échange l'abscisse et l'ordonnée : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$.

Exercice 2.4 — Utiliser les angles associés

Calculer sans calculatrice :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right), \qquad \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \qquad \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

3 Fonctions cosinus et sinus

Définitions et courbes représentatives

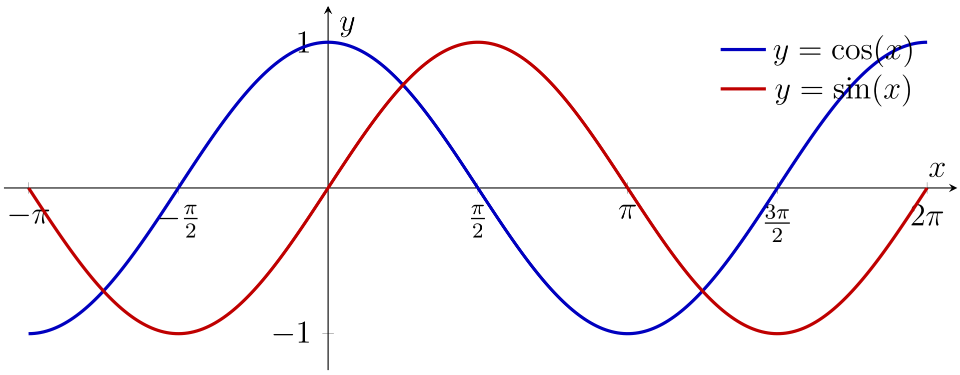
Définition 3.1: Fonctions cosinus et sinus

La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cos : x \longmapsto \cos(x).$$

La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sin : x \longmapsto \sin(x).$$



Exemple

On lit sur les courbes :

$$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0, \qquad \cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0.$$

Le cosinus atteint son maximum 1 en 0, tandis que le sinus s'annule en 0 puis croît jusqu'à 1 en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.1 — Lecture graphique

À partir des courbes, retrouver :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos(\pi), \qquad \sin(2\pi).$$

Préciser à chaque fois si la valeur est positive, négative ou nulle.

Parité et périodicité

Propriété 3.1: Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-**périodiques** : pour tout réel x,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Propriété 3.2: Parité

Pour tout réel x,

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Ainsi, la fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Remarque
Graphiquement, la courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tandis que la courbe du sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	-1	0	1	0	-1

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	-1	0	1	0

Exercice 3.2 — Parité et périodicité

Simplifier les expressions suivantes :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right), \qquad \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right), \qquad \sin(-2\pi + x).$$

4 Algorithme : approximation de π par la méthode d'Archimède

Propriété 4.1: Encadrement de π

Dans un cercle de rayon 1, le périmètre du polygone régulier inscrit à n côtés vaut

$$P_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Comme ce périmètre est inférieur à celui du cercle, on obtient

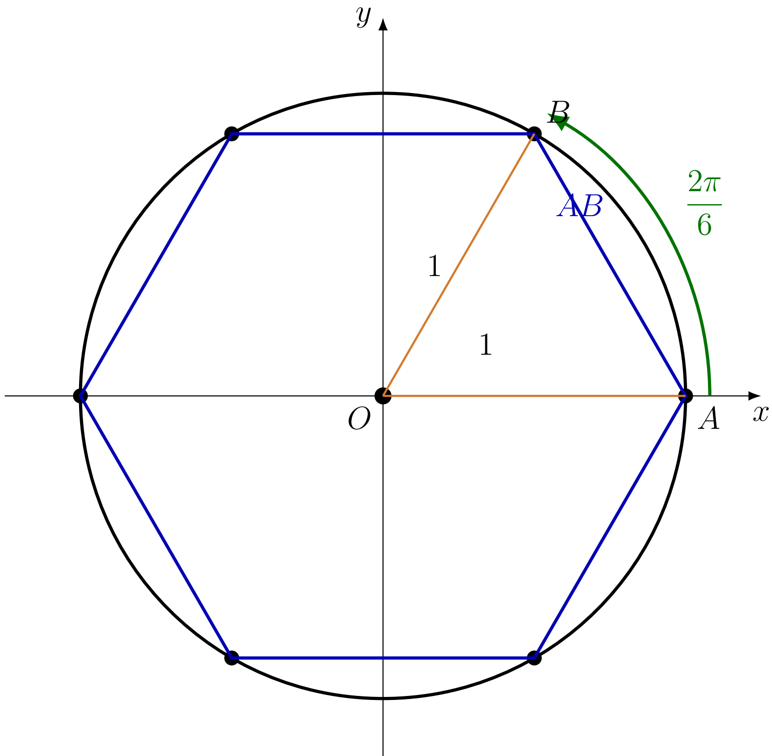
$$P_n < 2\pi \qquad \text{soit encore} \qquad n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi.$$

En augmentant le nombre de côtés, l'approximation devient meilleure : c'est l'idée de la méthode d'Archimède.

Exemple
Avec un hexagone inscrit, on trouve

$$\pi > 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$$

Avec un polygone à 96 côtés, l'approximation est déjà très fine.



Hexagone régulier inscrit dans le cercle unité

Exemple d'algorithme en Python

```
from math import sin, pi

for n in [6, 12, 24, 48, 96]:
    approximation = n * sin(pi / n)
    print(n, approximation)
```

Cet algorithme affiche des valeurs approchées inférieures à π. Plus n est grand, plus le polygone épouse le cercle, donc meilleure est l'approximation.

Exercice 4.1 — Algorithme d'Archimède

1. Calculer à la main l'approximation obtenue pour $n = 6$.
2. Expliquer pourquoi l'approximation est inférieure à π.
3. Recopier puis exécuter l'algorithme. Quelle approximation obtient-on pour $n = 96$?

Bilan

Pour étudier les fonctions trigonométriques, on part du cercle trigonométrique. Un réel x y détermine un point-image M_x, dont les coordonnées sont $(\cos(x); \sin(x))$. Les valeurs remarquables, les angles associés, la parité et la périodicité permettent ensuite de calculer efficacement et de lire les courbes représentatives.