Chapitre 6

12 Février 2026

Fonction exponentielle

Introduction

Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est d'introduire l'étude de la fonction exponentielle. Il permet de réinvestir les outils d'étude de fonctions (dérivation, sens de variation) et d'établir un lien naturel avec les phénomènes de croissance/décroissance et avec les suites géométriques.
Nous construirons la fonction exponentielle à partir d'une caractérisation simple ($f' = f$ et $f(0) = 1$), puis nous établirons ses principales propriétés algébriques et analytiques afin de résoudre des équations et des inéquations.

Capacités

- Calculer avec la fonction exponentielle.
- Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction exponentielle.
- Calculer des dérivées.
- Étudier le sens de variation de la fonction exponentielle et de fonctions associées.

Point histoire. La notation exponentielle s'est développée (fin XVII^{e} siècle) pour modéliser des phénomènes de croissance comme les intérêts composés. La constante e apparaît notamment dans les travaux d'Euler (XVIII^{e} siècle).

1 La fonction exponentielle :

Une intuition géométrique :

On souhaite interpréter **géométriquement** l'égalité suivante

$$f'(x) = f(x).$$

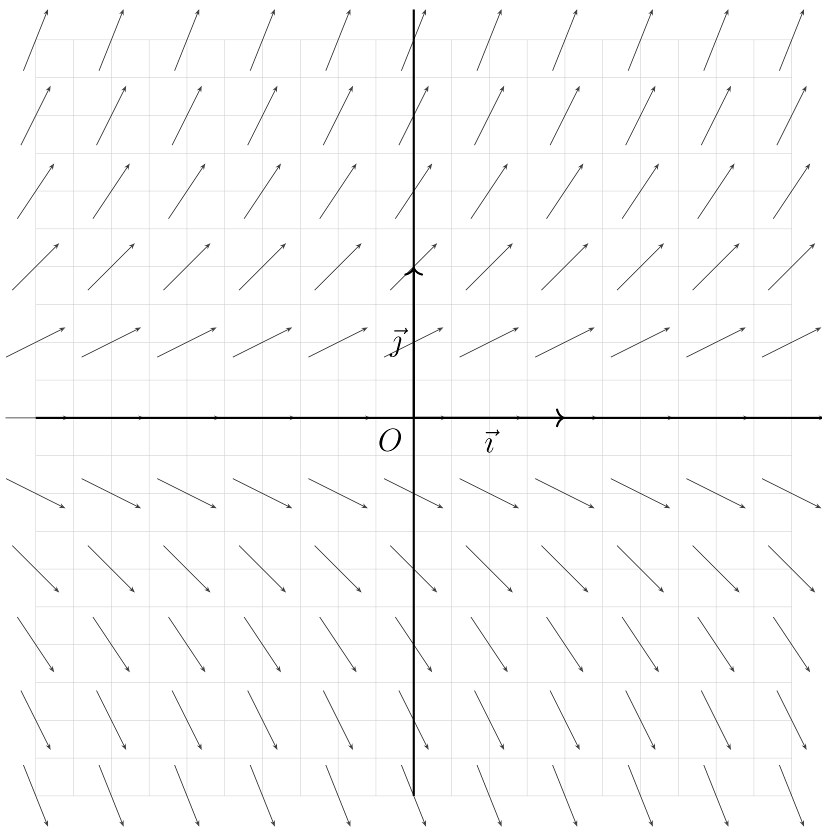
Ici l'inconnue est une fonction f.
Si un point de la courbe de f a pour coordonnées (x, y), alors $y = f(x)$ et la pente de la tangente en ce point vaut

$$f'(x) = f(x) = y.$$

Autrement dit, **la pente attendue au point** (x, y) **est égale à son ordonnée** y :

- si $y > 0$, la tangente est montante ;
- si $y = 0$, la tangente est horizontale ;
- si $y < 0$, la tangente est descendante ;
- plus $|y|$ est grand, plus l'inclinaison est forte.

Le dessin suivant est un **champ de pentes** : en chaque point du repère (ici tous les $1/2$), une petite flèche indique la direction que doit prendre la tangente d'une fonction vérifiant $f' = f$.



Remarque

Comment lire ce graphique ?

- Une solution $y = f(x)$ est une courbe qui, **en tout point**, est **tangente** aux petites flèches.
- En choisissant une valeur initiale $f(0)$, la courbe est « guidée » par le champ de pentes : si $f(0) > 0$, elle monte de plus en plus vite ; si $f(0) < 0$, elle descend de plus en plus vite.
- Plus loin, on établira que les solutions sont de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^x$ (avec $C \in \mathbb{R}$) : le champ de pentes donne une première intuition de la **croissance exponentielle**.

Mini-activité — Tracer une solution

1. Tracer à main levée une courbe solution qui passe par $(0, 1)$ en suivant les flèches.
2. Tracer une autre courbe solution qui passe par $(0, \frac{1}{2})$. Que remarquez-vous sur l'allure ?
3. Tracer une courbe solution qui passe par $(0, -1)$. Comparer avec les deux premières.

Définition 1.1: Fonction exponentielle

Il existe une **unique** fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note $\exp$.
Avec cette notation : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Définition 1.2: Notation e^x

On note $e = \exp(1)$.
Pour tout réel x, on note aussi $e^x = \exp(x)$.

Unicité : idée de démonstration

Propriété 1.1: La fonction exponentielle ne s'annule pas

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \neq 0$.

Idée de la preuve : Supposons f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On pose $k(x) = f(x)f(-x)$. Alors $k'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
Donc k est constante et $k(0) = 1$, d'où $f(x)f(-x) = 1$ et donc $f(x) \neq 0$.

Propriété 1.2: Unicité

Si f et g vérifient $f' = f$, $f(0) = 1$ et $g' = g$, $g(0) = 1$, alors $f = g$.

Idée de la preuve : Comme g ne s'annule pas, on pose $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
On a $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$.
Donc h est constante et $h(0) = 1$, d'où $h(x) = 1$ et $f(x) = g(x)$.

2 Propriétés algébriques

Propriété 2.1: Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x)\,\exp(y) \qquad (\text{donc } e^{x+y} = e^x e^y).$$

Idée de la preuve : Fixons $y \in \mathbb{R}$ et définissons $F(x) = \dfrac{\exp(x + y)}{\exp(x)}$.
F est dérivable (dénominateur non nul) et

$$F'(x) = \frac{\exp(x + y)\exp(x) - \exp(x + y)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0.$$

Donc F est constante et $F(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$. Ainsi $F(x) = \exp(y)$, soit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Propriété 2.2: Conséquences

Pour tous réels x et y, et tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$).
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ (donc $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$).
- $(\exp(x))^n = \exp(nx)$ (donc $(e^x)^n = e^{nx}$).

Idée de la preuve :

- On a $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$. Comme $\exp(x) \neq 0$, on peut diviser par $\exp(x)$ et obtenir
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$
- $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
  Pour $n = 0$, $(\exp(x))^0 = 1 = \exp(0) = \exp(0x)$.
  Supposons $(\exp(x))^n = \exp(nx)$. Alors
$$(\exp(x))^{n+1} = (\exp(x))^n \exp(x) = \exp(nx)\exp(x) = \exp((n+1)x).$$

Exemple

Simplifier : $e^3 \times e^{-4} \times e^2 = e^{3-4+2} = e^1 = e$.

3 Propriétés analytiques

Propriété 3.1: Signe

Pour tout réel x, on a $\exp(x) > 0$.

Propriété 3.2: Variations de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

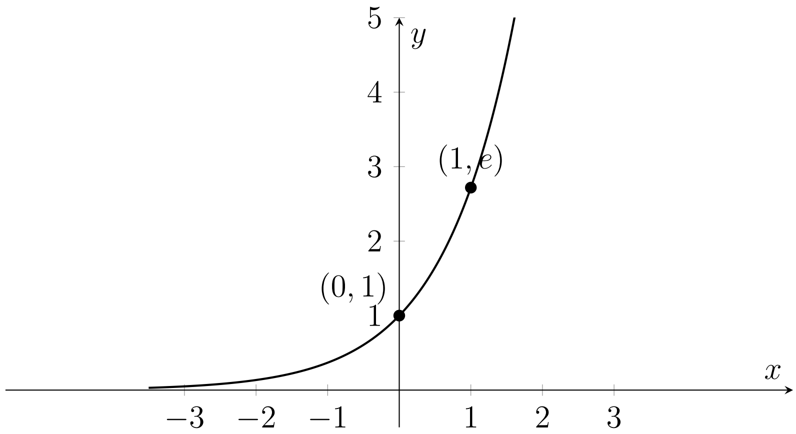
Remarque

Comme $\exp$ est strictement croissante, pour tous réels a et b :
$$e^a = e^b \iff a = b \qquad \text{et} \qquad e^a < e^b \iff a < b.$$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0^+	1	$+\infty$

Courbe représentative de $x \mapsto e^x$



Remarque

On admet (ou on observe) les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

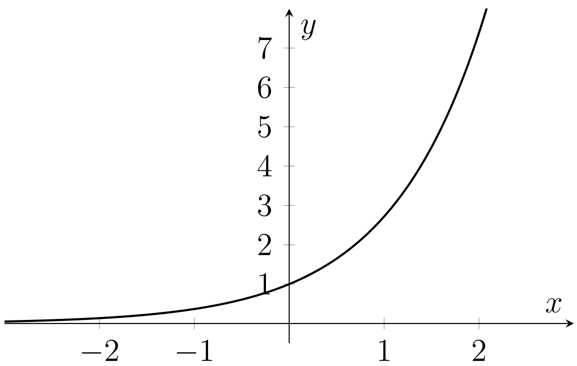
Famille $x \mapsto e^{kx}$

Propriété 3.3: Fonction $x \mapsto e^{kx}$

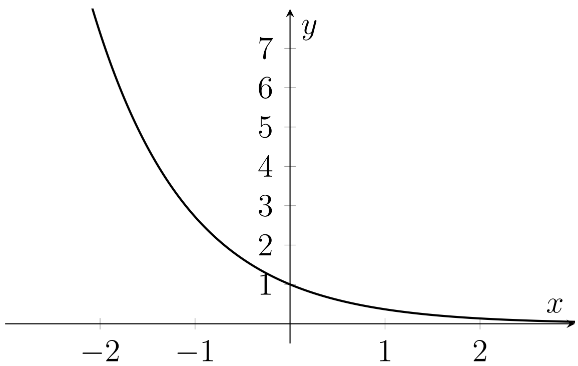
Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{kx}$.

- Si $k > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$k > 0$: exemple e^x



$k < 0$: exemple e^{-x}



4 Dérivation de fonctions exponentielles

Théorème 4.1: Rappel : dérivation d'une composée affine

Soient a et b deux réels, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant l'ensemble des $ax + b$ pour $x \in I$.
Si f est définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$, alors f est dérivable sur I et

$$f'(x) = a\,g'(ax + b).$$

Théorème 4.2: Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

Soient a et b deux réels, et $f(x) = e^{ax+b}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = a\, e^{ax+b}.$$

Exemple
Si $f(x) = e^{5x+4}$, alors $f'(x) = 5e^{5x+4}$.

Remarque
De manière générale (et en utilisant la dérivation d'une composée), si u est dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.

5 Équations et inéquations avec l'exponentielle

Propriété 5.1: Conséquences de la stricte croissance

Pour tous réels x et y :

$$e^x = e^y \iff x = y \qquad \text{et} \qquad e^x < e^y \iff x < y.$$

Exemple
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{3x+6} - 1 > 0$.

$$e^{3x+6} - 1 > 0 \iff e^{3x+6} > 1 \iff e^{3x+6} > e^0 \iff 3x + 6 > 0 \iff x > -2.$$

Remarque
Méthode. Pour résoudre une équation/inéquation avec $e^{u(x)}$:
- isoler l'exponentielle ;
- utiliser la croissance de e^x (comparaison des exposants) ;
- conclure sur l'ensemble des solutions.

6 Lien avec les suites géométriques et modélisations

Propriété 6.1: Croissance/décroissance exponentielle

Les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{kt}$ modélisent des phénomènes :
- de **croissance exponentielle** si $k > 0$;
- de **décroissance exponentielle** si $k < 0$.

Exemple
Radioactivité (modèle). On modélise le nombre de noyaux non désintégrés par

$$N(t) = N_0 e^{kt} \quad \text{avec } k < 0.$$

La quantité k est liée à la vitesse de désintégration : plus $|k|$ est grand, plus la décroissance est rapide.

7 Exercices

Consigne

Pour afficher les corrigés, placer `\corrigetrue` dans le préambule (à la place de `\corrigefalse`).

Exercice 7.1 — Calculs : simplifier

Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$

b) $B = \dfrac{e^{5x}}{e^{2x-1}}$

c) $C = \left(e^{3x}\right)^2$

d) $D = e \times (e^x)^{-4}$

Exercice 7.2 — Relation fonctionnelle

Montrer que pour tous réels x et y, on a $e^{x+y} = e^x e^y$, puis en déduire que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Exercice 7.3 — Dérivation

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{2x-3}$

b) $g(x) = e^{-5x+1}$

c) $p(x) = (2x-1)e^x$

Exercice 7.4 — Variations

On considère $f(x) = e^x - 3$.

a) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = -2$.

Exercice 7.5 — Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x+2} \leq e^{3-2x}$

b) $e^{2x} - e^x > 0$

Exercice 7.6 — Modélisation

On modélise une population bactérienne par $N(t) = N_0 e^{0,25t}$, où t est en heures.

a) Expliquer pourquoi il s'agit d'une croissance exponentielle.

b) Calculer $N(0)$ et $N(4)$ en fonction de N_0.