

# Variables aléatoires réelles

## Introduction

### Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de formaliser l'idée de **nombre dépendant du hasard** : une **variable aléatoire** associe, à chaque issue d'une expérience aléatoire, un nombre réel.

Dans tout le chapitre, on se place dans un **univers fini** et l'on étudie des **variables aléatoires réelles discrètes**. On apprend à :

- modéliser une situation par une variable aléatoire ;
- déterminer sa **loi de probabilité** ;
- calculer et interpréter **l'espérance**, la **variance** et **l'écart-type** ;
- utiliser la simulation (Python ou tableur) pour estimer et vérifier des résultats.

### Capacités

- Interpréter et utiliser les notations  $\{X = a\}$ ,  $\{X \leq a\}$ ,  $P(X = a)$ ,  $P(X \leq a)$ .
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance et un écart-type.
- Utiliser l'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable, gain moyen, coût moyen, ...).
- Simuler une variable aléatoire avec Python.

### Contenus

- Variable aléatoire réelle (discrète) : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart-type.
- Simulation et estimation (algorithmique).

### Point histoire (culture scientifique)

Les premières questions de « calcul des probabilités » apparaissent au xvii<sup>e</sup> siècle, autour des jeux de hasard (Pascal, Huygens, Bernoulli...). La notion moderne de variable aléatoire s'impose plus tard : c'est une **fonction** qui transforme la « source d'aléas » (l'univers  $\Omega$ ) en un nombre réel (gain, coût, nombre de succès, ...).

# 1 Variables aléatoires réelles

## Définition et notation

### Définition 1.1: Variable aléatoire réelle discrète

On considère une expérience aléatoire d'univers fini  $\Omega$  et une loi de probabilité  $P$  sur  $\Omega$ . Une **variable aléatoire réelle**  $X$  est une **fonction** :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui, à chaque issue  $\omega \in \Omega$ , associe un réel  $X(\omega)$ .

### Définition 1.2: Événements associés

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- L'événement  $\{X = a\}$  signifie : « la variable  $X$  prend la valeur  $a$  ».
- Sa probabilité se note  $P(X = a) = P(\{X = a\})$ .
- De même,  $\{X \leq a\}$  est l'événement «  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à  $a$  » et  $P(X \leq a)$  est sa probabilité.

### Remarque

**Interprétation.** L'événement  $(X = a)$  est l'ensemble des issues qui produisent la valeur  $a$  :

$$(X = a) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}.$$

Donc  $P(X = a)$  se calcule en additionnant les probabilités des issues correspondantes. C'est exactement la même logique que dans un arbre de probabilités : on regroupe les branches qui conduisent à la même valeur.

### Exemple

**Jeu d'urne.** Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher :

- trois boules rouges numérotées 1, 2, 3 :  $R_1, R_2, R_3$  ;
- trois boules vertes numérotées 0, 3, 5 :  $V_0, V_3, V_5$ .

Un joueur mise 2 € puis tire une boule au hasard.

- si la boule est rouge, il gagne 3 € ;
- si la boule est verte, il gagne (en euros) la valeur du numéro indiqué.

On note  $X$  la variable aléatoire « **gain algébrique** » (gain moins la mise de 2 €).

On a :

$$\Omega = \{R_1, R_2, R_3, V_0, V_3, V_5\} \quad (\text{équiprobabilité}).$$

### Remarque

Dans l'exemple précédent :

- si on tire  $V_5$ , le gain algébrique vaut  $5 - 2 = 3$  ;
- si on tire une boule rouge, le gain algébrique vaut  $3 - 2 = 1$  ;
- si on tire  $V_0$ , le gain algébrique vaut  $0 - 2 = -2$ .

La variable  $X$  peut donc prendre les valeurs  $-2, 1$  ou  $3$ .

## Loi de probabilité

### Définition 1.3: Loi de probabilité

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

La **loi de probabilité** de  $X$  est la donnée, pour chaque valeur  $x_i$ , de la probabilité

$$p_i = P(X = x_i).$$

On la présente souvent dans un tableau. On a toujours :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

### Exemple

Reprenons le jeu d'urne.

- $\{X = 3\} = \{V_5\}$  donc  $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ .
- $\{X = 1\} = \{R_1, R_2, R_3, V_3\}$  donc  $P(X = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .
- $\{X = -2\} = \{V_0\}$  donc  $P(X = -2) = \frac{1}{6}$ .

La loi de  $X$  est donc :

$x_i$	-2	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

### Remarque

On peut calculer des probabilités d'événements en **additionnant** les probabilités des valeurs correspondantes. Par exemple :

$$P(X \geq 0) = P(X = 1) + P(X = 3) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

### Exemple

**Deux étapes (lien avec les probabilités conditionnelles).** On choisit d'abord une urne, puis on tire une boule.

- Urne  $A$  avec 2 rouges et 1 bleue; urne  $B$  avec 1 rouge et 2 bleues.
- On choisit  $A$  avec probabilité 0,4 (donc  $B$  avec 0,6).
- On définit  $X = 1$  si la boule tirée est rouge, et  $X = 0$  sinon.

Alors, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(X = 1) = P(A)P(\text{rouge} | A) + P(B)P(\text{rouge} | B) = 0,4 \times \frac{2}{3} + 0,6 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5}.$$

Donc  $P(X = 0) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ .

## 2 Espérance, variance et écart-type

### Définitions

#### Définition 2.1: Espérance

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs  $x_1, \dots, x_n$  avec  $P(X = x_i) = p_i$ .  
L'**espérance** de  $X$  est le réel noté  $E(X)$  défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n.$$

#### Remarques

##### Interprétation (expert).

- $E(X)$  est une **moyenne pondérée** : chaque valeur est « comptée » proportionnellement à sa probabilité.
- Attention :  $E(X)$  n'est **pas forcément** une valeur que  $X$  peut prendre, et ce n'est **pas** une promesse sur une seule expérience. C'est un indicateur à long terme (moyenne sur un grand nombre de répétitions).

#### Exemple

On considère une variable aléatoire  $Y$  dont la loi est :

$y_i$	-4	0	4	20
$P(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

Alors :

$$E(Y) = 0,5 \times (-4) + 0,2 \times 0 + 0,2 \times 4 + 0,1 \times 20 = 0,8.$$

#### Remarque

Si  $X$  représente un **gain algébrique**, alors  $E(X)$  est le **gain moyen** sur un grand nombre de parties.

Un jeu est dit **équitable** lorsque  $E(X) = 0$ .

#### Remarque

**Nuance** : une espérance positive ne signifie pas « gagner à coup sûr ». Elle décrit un **comportement moyen** lorsque l'expérience est répétée de nombreuses fois. Pour comparer des situations où les gains sont très variables, on complète l'analyse avec la variance (ou l'écart-type).

#### Exemple

##### Même espérance, risques différents.

- Jeu A : gain certain 1 euro (donc  $P(X = 1) = 1$ ).
- Jeu B : gain 100 euros avec probabilité 0,01, sinon 0 euro.

Dans les deux cas,  $E(X) = 1$ . Pourtant, le jeu B donne presque toujours 0 et très rarement 100. On dit que le jeu B est **plus risqué** : sa dispersion autour de la moyenne est bien plus grande.

#### Définition 2.2: Variance

La **variance** de  $X$  est le réel noté  $V(X)$  défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

**Définition 2.3: Écart-type**

L'**écart-type** de  $X$  est le réel noté  $\sigma(X)$  défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Remarques****Interprétation**

- $V(X) \geq 0$  toujours, et  $V(X) = 0$  seulement si  $X$  est **constante** (aucun hasard sur la valeur).
- L'écart-type  $\sigma(X)$  est souvent plus parlant car il est dans la **même unité** que  $X$  (euros, secondes, points...), contrairement à la variance (unité au carré).

**Exemple**

Avec la variable  $Y$  précédente, on obtient :

$$V(Y) = 0,5(-4 - 0,8)^2 + 0,2(0 - 0,8)^2 + 0,2(4 - 0,8)^2 + 0,1(20 - 0,8)^2 = 50,56$$

et donc  $\sigma(Y) = \sqrt{50,56} \approx 7,11$ .

**Remarque**

Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs possibles de  $X$  sont **dispersées** autour de l'espérance.

**Propriété utile : formule de König-Huygens****Propriété 2.1: Formule de König-Huygens**

On a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

**Remarque**

Cette formule est souvent plus rapide que la définition de la variance, car il suffit de calculer  $E(X)$  puis  $E(X^2)$ .

### 3 Transformations et propriétés

#### Variable aléatoire $aX + b$

##### Définition 3.1: Transformation affine

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. À partir d'une variable aléatoire  $X$ , on peut définir une nouvelle variable aléatoire  $aX + b$  en posant :

$$(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b \quad (\omega \in \Omega).$$

##### Propriété 3.1: Effet sur les indicateurs

Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad V(aX + b) = a^2V(X), \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

##### Remarques

Ajouter  $b$  à  $X$  ( $X \mapsto X + b$ ) **décale** toutes les valeurs :  
l'espérance se décale de  $b$ , mais la dispersion ne change pas.  
Multiplier par  $a$  ( $X \mapsto aX$ ) **étire** (ou contracte) l'échelle :  
l'écart-type est multiplié par  $|a|$ , et la variance par  $a^2$ .  
Si  $a < 0$ , on a en plus une **symétrie** (inversion) des valeurs :  
la distribution est reflétée.

##### Exemple

$Z$  est une variable aléatoire qui prend les valeurs 2, 4 ou 8. On définit  $Z' = 2Z - 1$ .  
Alors :

$$E(Z') = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1.$$

#### Espérance et simulation (idée clé)

##### Propriété 3.2: Lien avec la simulation

Lorsque l'on simule un grand nombre de valeurs d'une variable aléatoire  $X$  (échantillon de grande taille), la **moyenne** des valeurs simulées est **proche** de  $E(X)$ .

## 4 Simulation avec Python

### Simuler une valeur de $X$

#### Algo & Prog — Simulation d'une variable aléatoire

On veut obtenir au hasard une valeur prise par une variable aléatoire dont on connaît la loi. En Python, on peut utiliser `random.choices` (tirage pondéré) :

```
import random

# Loi de X : valeurs et probabilités
valeurs = [-2, 1, 3]
probas = [1/6, 2/3, 1/6]

def simule_X(n):
    return random.choices( valeurs, weights = probas, k = n)

# Exemple : simuler 10 valeurs
print(simule_X(10))
```

### Estimer l'espérance par simulation

#### Algo & Prog — Estimation de l'espérance

```
import random
import statistics
# Loi de X : valeurs et probabilités
valeurs = [ -2 , 1 , 3]
probas = [1/6 , 2/3 , 1/6]

def simule_X(n) :
    return random.choices( valeurs , weights = probas , k = n)

# Exemple : simuler 10 valeurs
statistics.mean(simule_X(10))
```

**Interprétation :** plus  $N$  est grand, plus la moyenne simulée se rapproche de  $E(X)$ .

#### Remarque

- La simulation donne une **approximation** : elle n'est pas une preuve. En général, l'erreur sur la moyenne empirique diminue quand  $N$  grandit (elle est typiquement de l'ordre de  $1/\sqrt{N}$ ). Ainsi, passer de  $N = 10\,000$  à  $N = 40\,000$  améliore la précision d'un facteur  $\approx 2$ . Pour rendre un résultat reproductible, on peut aussi fixer une graine aléatoire (par exemple `random.Random(27081981)`).

## Algo &amp; Prog — Estimation de l'espérance

```
import random, statistics

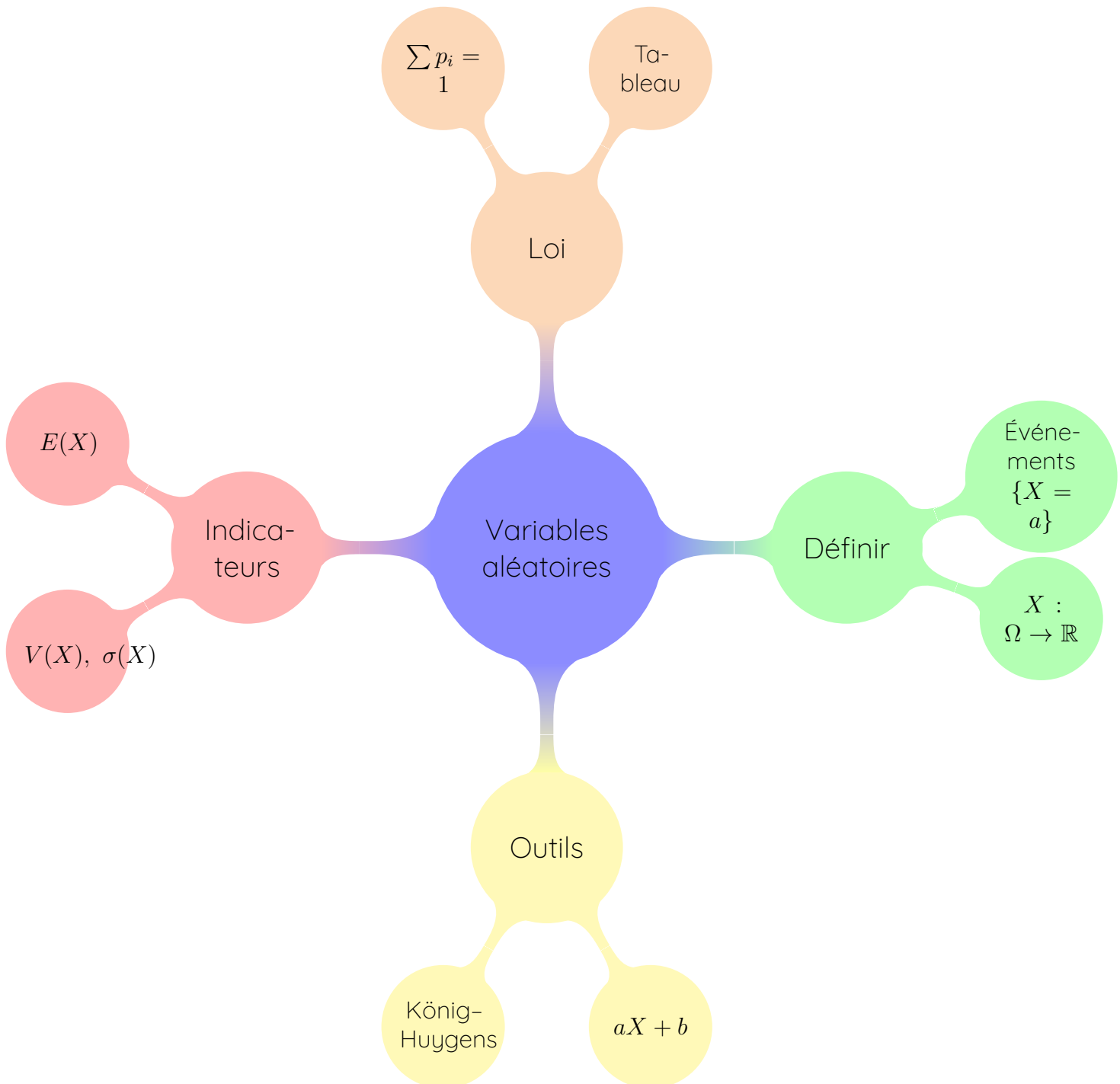
rng = random.Random(27081981) # hazard reproductible

valeurs = [-2, 1, 3]
probas = [1/6, 2/3, 1/6]

def simule_X(n, rng=rng):
    return rng.choices(valeurs, weights=probas, k=n)

print(statistics.mean(simule_X(10))) # >>> 3
print(statistics.mean(simule_X(1000))) # >>> 3.512 (presque 3.5)
```

## Carte mentale



## Exercices

### Exercice 4.1 — Jeu au dé

Niveau = ★★★★★

Un joueur lance un dé équilibré :

- si le dé affiche 1, 2, 3 ou 4, il **perd** 10 €;
- si le dé affiche 5, il **gagne** 15 €;
- si le dé affiche 6, il **gagne** 25 €.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain (en euros).

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$ . Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer  $V(X)$  puis  $\sigma(X)$ .

### Exercice 4.2 — Deux lancers de pièce

Niveau = ★★☆☆☆

On mise 5 € puis on lance **deux fois** une pièce équilibrée. On gagne 4 € par Pile obtenu. Par exemple, avec deux Pile, le gain algébrique vaut  $4 + 4 - 5 = 3$ . On note  $X$  le gain algébrique.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$  et conclure.

### Exercice 4.3 — Traduire des événements

Niveau = ★★☆☆☆

On lance successivement une pièce équilibrée **cinq** fois. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenus.

1. Traduire par une phrase les événements  $\{X = 4\}$  et  $\{X \geq 3\}$ .
2. Calculer  $P(X \leq 1)$ .
3. Comment noter la probabilité de faire au moins 4 Pile ?

### Exercice 4.4 — Coût de réparation

Niveau = ★★★☆☆

Un jouet peut présenter un défaut de solidité (coût : 12 €) et/ou un défaut de couleur (coût : 5 €). Sur un échantillon de 1000 jouets, on observe :

	Défaut couleur	Pas de défaut couleur	Total
Défaut solidité	5	28	33
Pas de défaut solidité	15	952	967
Total	20	980	1000

On choisit un jouet au hasard. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le **coût total** de réparation.

1. Quelles valeurs peut prendre  $X$  ?
2. Déterminer la loi de  $X$ .
3. Calculer  $E(X)$  et interpréter.

**Exercice 4.5** – Simulation

Niveau = ★★☆☆☆

On considère une variable aléatoire  $X$  telle que  $P(X = -8) = 0,58$  et  $P(X = 15) = 0,42$ .

1. Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .
2. Écrire un programme Python qui simule une valeur de  $X$ .
3. Simuler  $N = 10\,000$  valeurs et afficher la moyenne observée.

## Variables aléatoires réelles — L'essentiel

A retenir (objectif du chapitre)

On se limite aux **variables aléatoires réelles discrètes**. A savoir faire :

- lire/établir une **loi de probabilité** ;
- calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$ ,  $\sigma(X)$  à partir d'une loi ;
- traiter une transformation  $Y = g(X)$ .

### 5 Définition et loi de probabilité

Définition

Une **variable aléatoire** est une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à chaque issue  $\omega$  un nombre réel  $X(\omega)$ .

Loi de probabilité (cas discret)

Si  $X$  prend les valeurs  $x_1, \dots, x_n$ , la **loi** de  $X$  est le tableau donnant  $P(X = x_i)$  pour chaque  $i$ . On a toujours :

$$P(X = x_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1.$$

Exemple (dé truqué)

On lance un dé :

$$X = \begin{cases} 2 & \text{si on fait 6,} \\ -1 & \text{si on fait 1 ou 2,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $X \in \{-1, 0, 2\}$  et

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(X = -1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

### 6 Calculs à partir de la loi

Méthode

A partir d'une loi :

- pour une probabilité du type  $P(X \in A)$ , on **additionne** les probabilités des valeurs appartenant à  $A$  ;
- pour une question du type  $P(X \leq a)$ , on additionne les probabilités des valeurs  $x_i \leq a$ .

Exemple

Avec la loi précédente :

$$P(X \geq 0) = P(X = 0) + P(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

## 7 Espérance, variance, écart-type

### Espérance

Si  $X$  prend les valeurs  $x_1, \dots, x_n$ , alors

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

### Variance et écart-type

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Formule pratique :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

### Exemple (dé truqué)

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0.$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Donc  $V(X) = 1$  et  $\sigma(X) = 1$ .

## 8 Transformation $Y = g(X)$

### Méthode

Si  $Y = g(X)$  :

1. lister les valeurs possibles  $x_i$  de  $X$  ;
2. calculer  $y_i = g(x_i)$  ;
3. regrouper les valeurs identiques de  $Y$  en **additionnant** les probabilités.

### Exemple

Avec le dé truqué, on pose  $Y = X^2$ . Alors  $Y \in \{0, 1, 4\}$  et

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{3}, \quad P(Y = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{6}.$$

## 9 Simulation Python (optionnel)

### Idée

Une simulation permet d'approcher une espérance ou des probabilités et de comparer au calcul exact.

```
import random

def simuler(n=100000):
    valeurs = []
    for _ in range(n):
        d = random.randint(1, 6)
        if d == 6:
            x = 2
        elif d in (1, 2):
            x = -1
        else:
            x = 0
        valeurs.append(x)

    # estimation de E(X)
    ex = sum(valeurs) / n

    # estimation des probabilités
    p_m1 = valeurs.count(-1) / n
    p_0 = valeurs.count(0) / n
    p_2 = valeurs.count(2) / n
    return ex, p_m1, p_0, p_2

print(simuler())
```

## 10 Exercices essentiels

### Exercice 10.1 — Loi, espérance, variance

On lance une pièce équilibrée deux fois. On note  $X$  le nombre de faces obtenues.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Exercice 10.2 — Calcul direct

Une variable aléatoire  $X$  vérifie  $P(X = -2) = 0,2$ ,  $P(X = 1) = 0,5$ ,  $P(X = 4) = 0,3$ . Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .

### Exercice 10.3 — Transformation

Soit  $X$  telle que  $P(X = -1) = 0,3$  et  $P(X = 2) = 0,7$ . On pose  $Y = 3X - 5$ .

- Donner la loi de  $Y$ .
- Calculer  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .