

Variations et courbes représentatives de fonctions

Introduction

Objectifs

À l'issue de ce complément, on doit savoir :

- établir le **lien entre le sens de variation de f et le signe de f'** ;
- dresser un **tableau de signes** de f' puis un **tableau de variations** de f ;
- déterminer des **extremums** (locaux et globaux sur un intervalle);
- résoudre des **problèmes d'optimisation** simples;
- exploiter les variations pour **établir une inégalité** et étudier la **position relative** de deux courbes;
- utiliser une **approximation affine** : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$;
- connaître le principe de la **méthode de Newton** (cas favorables).

Points de vigilance (pour éviter les erreurs classiques)

- **Local vs global.** Le signe de $f'(a)$ renseigne le **comportement près de a** . Pour conclure sur un intervalle I , il faut un signe de $f'(x)$ **valable pour tout $x \in I$** .
- $f'(x_0) = 0$ **n'est pas suffisant.** Une tangente horizontale est une **condition nécessaire** pour un extremum local (si f est dérivable), mais pas suffisante (ex. $f(x) = x^3$ en 0).
- **Croissante / strictement croissante.** Attention à la nuance : $f'(x) \geq 0$ sur $I \Rightarrow f$ est croissante (au sens large); $f'(x) > 0$ sur $I \Rightarrow f$ est strictement croissante.
- **Extremum global sur $[a; b]$.** On compare **les valeurs** de f aux points critiques et aux **bornes a et b** .
- **Approximation.** Le symbole \simeq signifie « **approx.** » : on obtient une valeur proche, pas une égalité exacte (même idée pour Newton).

Remarques

Dans l'esprit du programme, on privilégie une approche **intuitive et graphique** (tangentes, lecture de courbes, outils numériques) et on s'appuie sur des calculs accessibles (polynômes, quotients simples, racine carrée, inverse).

1 Étudier les variations : trois méthodes (numérique, définition et dérivée)

Méthode 0 : variations numériques (valeurs discrètes, sans expression)

PER — Situation-problème : Radar de recul (Étape 1)

Données. Un capteur ultrason renvoie, à intervalles réguliers, une mesure d (en mm). On obtient une fonction **mesurée** :

$$t \mapsto d(t).$$

Problème (début du chapitre). On ne cherche pas encore la vitesse : on veut d'abord décider **si l'on est en train de se rapprocher** et déclencher une alarme **simple**.

- **STOP** si $d \leq 200$ mm (20 cm).
- **ATTENTION** si $d \leq 2000$ mm (200 cm) **et** si la distance **diminue** (approche).

Méthode 0 — Numérique (discret, sans expression)

Quand on ne connaît pas l'expression d'une fonction (tableau de valeurs, mesures d'un capteur), on peut étudier les variations en regardant le signe des **différences** :

$$\Delta d_n = d_{n+1} - d_n.$$

- Si $\Delta d_n < 0$, alors la distance **diminue** : on **s'approche**.
- Si $\Delta d_n > 0$, alors la distance **augmente** : on **s'éloigne**.

Remarque (mesures réelles). Un capteur peut être **bruité** : on peut utiliser une **marge** (ex : conclure "approche" seulement si $d_{n+1} < d_n - 10$ mm).

Algorithme (Étape 1) — détecter l'approche (sans vitesse)

Entrées : une suite de mesures d_0, d_1, \dots (en mm) renvoyées par le capteur à intervalles réguliers.

Idee : on ne cherche pas encore "à quelle vitesse ?", seulement "est-on en train de se rapprocher ?"

1. Initialiser $d_0 \leftarrow$ première mesure.
2. À chaque nouvelle mesure d_1 :
 - si $d_1 \leq 200$ mm, déclencher **STOP** (sirène continue);
 - sinon, si $d_1 \leq 2000$ mm **et** $d_1 < d_0 - \text{marge}$, déclencher un **bip d'attention**;
 - mettre à jour $d_0 \leftarrow d_1$.

Remarque : la marge sert à éviter les faux déclenchements dus au bruit du capteur.

Exemple

On relève (en mm) : $d_0 = 300, d_1 = 280, d_2 = 255$.

$$\Delta d_0 = 280 - 300 = -20 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{on s'approche,}$$

$$\Delta d_1 = 255 - 280 = -25 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{on s'approche encore.}$$

**Question flash**

On observe $d_0 = 400$ mm puis $d_1 = 395$ mm.

1. Calculer $\Delta d_0 = d_1 - d_0$ et interpréter le signe.
2. Même question si $d_1 = 420$ mm.

Code Python pour SPIKE (Étape 1 : 2 alarmes, sans vitesse)

```

# Import : acces au port A (capteur) et au haut-parleur (bips)
from hub import port, sound

# Import : boucle asynchrone + capteur de distance
import runloop, distance_sensor

INTERVAL_MS = 80 # Temps (ms) entre deux mesures : cadence de lecture du capteur

STOP_MM = 200 # Seuil STOP (mm) : 200 mm = 20 cm (alarme prioritaire)

WARN_MM = 2000 # Seuil ATTENTION (mm) on ne bipe que si on est "assez proche"

# Marge (mm) pour ignorer le bruit du capteur
# Exemple : si la distance baisse de moins de 10 mm, on ne conclut pas "approche"
MARGE_MM = 10

async def main():
    # d0 : distance precedente (mm) -> "ancienne" mesure
    d0 = distance_sensor.distance(port.A)

    # Boucle infinie : le radar fonctionne en continu
    while True:
        # Attendre un peu avant la prochaine mesure
        await runloop.sleep_ms(INTERVAL_MS)

        # d1 : nouvelle distance (mm) -> "nouvelle" mesure
        d1 = distance_sensor.distance(port.A)

        # --- Mesure invalide ---
        # Le capteur peut renvoyer -1 s'il ne detecte rien / hors plage
        # Dans ce cas, on ne calcule rien et on repart
        if d0 == -1 or d1 == -1:
            d0 = d1
            continue

        # --- STOP prioritaire ---
        # Si on est tres proche (distance <= STOP_MM), on declenche la sirene
        if d1 <= STOP_MM:
            # Sirene simple : alternance aigu / grave
            await sound.beep(1500, 120)
            await sound.beep(800, 120)

            # Mise a jour de la reference et on recommence
            d0 = d1
            continue

        # --- ATTENTION : proche + approche ---
        # "Approche" = la distance diminue de facon significative
        # d1 < d0 - MARGE_MM signifie : baisse > MARGE_MM (pas juste du bruit)
        if d1 <= WARN_MM and d1 < d0 - MARGE_MM:
            # Bip attention (court)
            await sound.beep(900, 60)

    # Mise a jour : la nouvelle mesure devient l'ancienne pour le tour
    d0 = d1

```

Remarque

Une fonction définie avec `async def` est une **fonction asynchrone** : elle s'exécute « par étapes » et peut s'interrompre temporairement sur des instructions `await`. Lorsqu'on rencontre `await` (par exemple `await runloop.sleep_ms(...)` ou `await sound.beep(...)`), la fonction `main` rend **la main** au système (`runloop`), puis reprend automatiquement après l'attente. C'est ce mécanisme qui permet de temporiser (pause, bip) sans bloquer le fonctionnement général du hub.

Remarque

L'instruction `await runloop.sleep_ms(INTERVAL_MS)` impose une **pause** de `INTERVAL_MS` millisecondes dans l'exécution de la fonction `main`. Autrement dit, on demande au « chef d'orchestre » `runloop` de **revenir vers notre boucle** après ce délai : la boucle `while True` s'interrompt temporairement puis reprend à la ligne suivante. Cela fixe la **cadence des mesures** et laisse au système le temps de gérer ses tâches internes.

Remarques

Numérique vs rigoureux. La méthode 0 est **numérique** : elle s'appuie sur un **tableau de valeurs** (données discrètes), donc elle décrit une **tendance observée** sur les mesures (elle dépend du pas h et du bruit). Elle ne constitue pas, à elle seule, une preuve que la fonction est croissante/décroissante sur tout un intervalle.

La méthode 1, au contraire, est une **démonstration** : on suppose l'expression de f connue et l'on prouve l'implication $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (ou $f(x) \geq f(y)$) pour **tous** x, y de l'intervalle.

Méthode 1 : variations par définition (avec expression, preuve rigoureuse)

Définition 1.1: Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous $x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous $x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

(Version stricte : on remplace \leq par $<$ et \geq par $>$.)

Méthode 1 — Définition

Pour montrer que f est croissante sur I (resp. décroissante) :

1. choisir $x, y \in I$ avec $x \leq y$;
2. comparer $f(x)$ et $f(y)$ (souvent en étudiant $f(y) - f(x)$);
3. conclure que $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

À retenir : cette méthode marche même si f n'est pas dérivable.

Exemple

Montrer que $f(x) = x^2$ est **croissante** sur $[0; +\infty[$. On prend $0 \leq x \leq y$. Alors

$$f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Comme $y - x \geq 0$ et $y + x \geq 0$, on obtient $f(y) - f(x) \geq 0$, donc $f(x) \leq f(y)$: f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice 1.1 — Par la définition

Montrer que $g(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.

1. Soient $0 < x \leq y$. Étudier le signe de $g(y) - g(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.
2. Conclure avec la définition d'une fonction décroissante.

Remarque

Quand f est **dérivable**, on dispose d'une méthode plus rapide : étudier le signe de f' (méthode 2). L'objectif du chapitre est de savoir choisir la bonne méthode **et** de comprendre le lien entre les deux.

Méthode 2 : variations via la dérivée (cas analytique et cas numérique)

Propriété 1.1: Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f'(x) = 0$), alors f est **croissante** sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f'(x) = 0$), alors f est **décroissante** sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I .

Remarque

Deux façons d'utiliser la dérivée.

- **Cas analytique (expression connue).** Si l'on connaît l'expression de f , on calcule $f'(x)$ (règles de dérivation), puis on étudie le **signe** de f' pour conclure sur les variations.
- **Cas numérique (expression inconnue).** Si l'on ne connaît pas l'expression (capteur, tableau), on peut **estimer** la dérivée par un **taux de variation** sur un petit pas h :

$$d'(t) \approx \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

Cette méthode est **pratique** mais elle reste une **approximation** (pas h , bruit, valeurs discrètes).

Remarque

On retiendra : f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ sur I (et de même pour décroissante).

Méthode 2 — Dérivée

Pour étudier les variations d'une fonction f :

1. déterminer l'ensemble de définition D_f et l'ensemble de dérivabilité;
2. calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$ (ainsi que les valeurs interdites);
3. étudier le **signe** de $f'(x)$ sur D_f ;
4. compléter le **tableau de variations** : si $f'(x) > 0$, f **croît**; si $f'(x) < 0$, f **décroît**.

Exemple

Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.

Réponse : f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} .

Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 10x - 3.$$

Je résous $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{10}$. Comme f' est affine à coefficient dominant positif, on a $f'(x) < 0$ si $x < \frac{3}{10}$ et $f'(x) > 0$ si $x > \frac{3}{10}$. Les variations de f sont données par ce tableau :

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	8.55	$+\infty$

Exemple

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

Étudier les variations de g .

Réponse :

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Pour tout $x \neq 0$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, $g'(x)$ est du même signe que $(x-1)(x+1)$.

Ainsi $g'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 1$, et g n'est pas définie en 0.

De plus $g(-1) = -2$ et $g(1) = 2$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$		-2			2	

Bilan : g est croissante sur $] -\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, et décroissante sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$.

Exemple

Soit $g(x) = \frac{5x-6}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. On obtient

$$g'(x) = \frac{21}{(x+3)^2} > 0 \quad \text{pour tout } x \neq -3.$$

Ainsi, g est strictement croissante sur $] -\infty; -3[$ et sur $] -3; +\infty[$.

Complément (théorique) : du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété 1.2: Variations et signe de la dérivée

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I .

- Si f est **croissante** sur I , alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est **constante** sur I , alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Idée de démonstration. On fixe $a \in I$. Si f est croissante, alors pour $x \neq a$ les quantités $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont de même signe, donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

En faisant tendre x vers a , on obtient $f'(a) \geq 0$. Les deux autres cas se traitent de la même manière. \square

Corrigé flash Démonstration détaillée. On fixe $a \in I$ et on considère $x \in I$ avec $x \neq a$.

- **Cas $x > a$.** Comme f est croissante sur I , on a $f(x) \geq f(a)$, donc $f(x) - f(a) \geq 0$ et $x - a > 0$.
Ainsi $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$.
- **Cas $x < a$.** Comme f est croissante sur I , on a $f(x) \leq f(a)$, donc $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$.
Ainsi $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ (quotient de deux nombres négatifs).

On a donc, pour tout $x \in I$, $x \neq a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Or f est dérivable en a , donc la limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Comme les quotients sont ≥ 0 pour $x \neq a$, leur limite est également ≥ 0 ; on obtient bien $f'(a) \geq 0$.

Les autres cas se traitent de la même façon :

- si f est **décroissante**, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ pour tout $x \neq a$, donc $f'(a) \leq 0$;
- si f est **constante**, alors $f(x) - f(a) = 0$ pour tout x , donc $f'(a) = 0$.

\square

Exercice 1.2 – Comparaison des deux méthodes

Étudier $g(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer par définition que g est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.
2. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur \mathbb{R} .
3. Dresser le tableau de variations complet de g .
4. Quel méthode trouvez-vous plus efficace ?

Question flash

Sans calculs longs :

1. Si $f'(x) < 0$ sur $]2; 5[$, que peut-on dire des variations de f sur $]2; 5[$?
2. Si $f'(a) > 0$ mais $f'(b) < 0$, peut-on conclure sur les variations de f sur $[a; b]$? Pourquoi ?
3. Dans un tableau de variations, que représente une valeur où $f'(x) = 0$?

Corrigé flash 1. Si $f'(x) < 0$ sur $]2; 5[$, alors f est **strictement décroissante** sur $]2; 5[$.

2. Non. Savoir que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ ne renseigne pas sur le **signe de f' sur tout $[a; b]$** . Il faut étudier f' sur l'intervalle. (On peut seulement affirmer qu'il existe au moins un $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$, par la **propriété de Darboux** des dérivées.)
3. Une valeur où $f'(x) = 0$ correspond à un **point stationnaire** : la tangente est horizontale. Cela peut être un extremum local si f' **change de signe**, sinon cela peut être un point d'inflexion (ex. x^3).

2 Nombre dérivé et extremums locaux

Minimum et maximum locaux

Définition 2.1: Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Un minimum ou maximum local est appelé **extremum local**.

Dérivée en un extremum : tangente horizontale

Propriété 2.1: Dérivée en un extremum local

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0 , alors

$$f'(x_0) = 0.$$

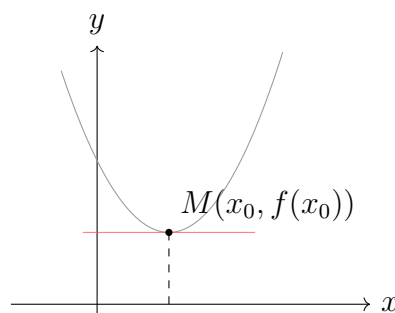
Graphiquement, la tangente à la courbe en x_0 est **horizontale**.

Piège

Ne pas confondre **condition nécessaire** et **condition suffisante** :

$$f'(x_0) = 0 \text{ n'implique pas « extremum en } x_0 \text{ ».}$$

Pour conclure, on étudie le **signe de f' autour de x_0** (changement de signe) ou on raisonne sur les variations. De plus, un extremum peut exister sans dérivabilité (ex. $f(x) = |x|$ en 0).



En un extremum local, la tangente est horizontale : $f'(x_0) = 0$.

Caractériser un extremum avec le signe de f'

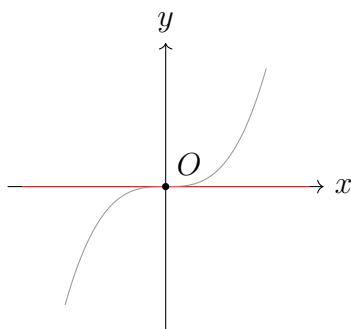
Propriété 2.2: Changement de signe de f'

Soit f dérivable sur $I =]a; b[$ et $x_0 \in I$.

- Si $f'(x_0) = 0$ et si f' **passé de $-$ à $+$** en x_0 , alors f admet un **minimum local** en x_0 .
- Si $f'(x_0) = 0$ et si f' **passé de $+$ à $-$** en x_0 , alors f admet un **maximum local** en x_0 .

Remarque

Attention : $f'(x_0) = 0$ **n'implique pas** forcément qu'il y a un extremum local (exemple classique : $f(x) = x^3$).



+ On dit que f admet un point d'inflexion en $x = 0$ (vue en Tle)

Exemple : $f(x) = x^3$ a bien $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum.

Exemple

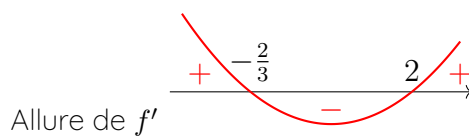
Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$, définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} .

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64$$

Donc f' admet deux racines réelles $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 8}{6} = 2$.



x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$+$	$\dot{0}$	$-$	$\dot{0}$	$+$
Variations de f					

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 2,148 \text{ (arrondi au centième)}$$

$$f(2) = -7$$

Donc f admet un maximum local en $x = -\frac{2}{3}$ et un minimum local en $x = 2$.

Remarque : nous ne pouvons pas déterminer un maximum global pour f car il n'existe pas $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$.
De la même façon pour le minimum global.

Question flash 1. Si f est dérivable et admet un maximum local en x_0 , que vaut nécessairement $f'(x_0)$?

2. Pourquoi $f'(x_0) = 0$ ne suffit-il pas à garantir un extremum ?

3. Sur un intervalle fermé $[a; b]$, où faut-il chercher les candidats au maximum global ?

Corrigé flash 1. Si f est dérivable et admet un maximum local en x_0 , alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

2. Parce que $f'(x_0) = 0$ signifie seulement "tangente horizontale". Il peut ne pas y avoir d'extremum (ex. $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$ mais pas de maximum/minimum). Pour conclure, on cherche un **changement de signe** de f' ou on étudie les variations.

3. Sur $[a; b]$, les candidats au maximum global sont : les **bornes** a et b , et les **points critiques** de $]a; b[$ (où $f'(x) = 0$ ou f' n'existe pas). On compare ensuite les valeurs de f .

3 Exploiter les variations : inégalités et position relative

Établir une inégalité avec une fonction monotone

Propriété 3.1: Inégalité et monotonie

Si f est **croissante** sur un intervalle I , alors pour tous $x, y \in I$,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Si f est **décroissante** sur I , alors

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

Traduction

Méthode (monotonie \Rightarrow inégalité).

1. Vérifier que x et y sont dans le **domaine** et dans le **même intervalle** I .

2. Identifier si f est **croissante** ou **décroissante** sur I .

3. Remplacer $x \leq y$ par l'inégalité correspondante entre $f(x)$ et $f(y)$.

Exemple

Sur $[0; +\infty[$, la fonction racine carrée est croissante. Ainsi,

$$4 \leq 4,03 \leq 4,1 \implies 2 \leq \sqrt{4,03} \leq \sqrt{4,1}.$$

Position relative de deux courbes

Propriété 3.2: Comparer deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I . On pose $h = f - g$.

• si $h(x) \geq 0$ sur I , alors la courbe C_f est **au-dessus** de C_g sur I ;

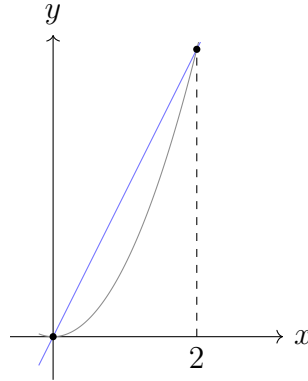
• si $h(x) \leq 0$ sur I , alors C_f est **au-dessous** de C_g sur I .

Les points d'intersection de C_f et C_g correspondent aux solutions de $h(x) = 0$.

Traduction

Comparer C_f et C_g : on étudie le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Résoudre $h(x) = 0$ pour trouver les **abscisses d'intersection**.
2. Étudier le **signe de h** (factorisation, tableau, variations).
3. Conclure : $h \geq 0 \Rightarrow C_f$ au-dessus de C_g ; $h \leq 0 \Rightarrow$ au-dessous.



Ici, C_g est au-dessus de C_f sur $]0; 2[$, puis en dessous pour $x > 2$.

Exemple

Pour comparer $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$ sur \mathbb{R} .

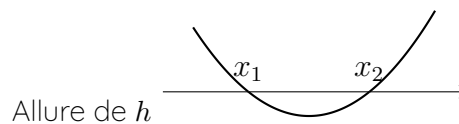
On étudie $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 1$.

Je résous $h(x) = 0$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$$

h admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$



x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
Signe de $h(x)$	+	0	-	0	+
Positions de C_f par rapport à C_g	<i>au dessus</i>		<i>au dessous</i>		<i>au dessus</i>

Comme h est un trinôme avec coefficient dominant positif, on a :

$$h(x) \geq 0 \text{ pour } x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ ou } x \geq 1 + \sqrt{2}, \quad h(x) \leq 0 \text{ pour } 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Donc C_f est au-dessus de C_g à l'extérieur de $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ et en dessous à l'intérieur.

Question flash 1. Si $f(x) \geq g(x)$ sur I , quelle courbe est au-dessus sur I ?

2. Quelle fonction étudie-t-on pour comparer f et g ?

3. Une fonction est croissante sur I : que devient une inégalité sur les antécédents ?

- **Corrigé flash** 1. Si $f(x) \geq g(x)$ sur I , alors la courbe C_f est **au-dessus** de C_g sur I .
- 2. Pour comparer f et g , on étudie $h = f - g$ et son **signe**.
- 3. Si f est **croissante** sur I , alors une inégalité sur les antécédents est **conservée** : $u \leq v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$. (Si f est strictement croissante, on a aussi $f(u) < f(v) \Rightarrow u < v$.)

4 Optimisation

Méthode

Pour résoudre un problème d'optimisation :

1. traduire la grandeur à optimiser par une **fonction** $g(x)$;
2. préciser l'**intervalle** des valeurs possibles de x ;
3. étudier les variations de g (dérivée, tableau);
4. comparer éventuellement avec les **valeurs aux bornes** de l'intervalle.

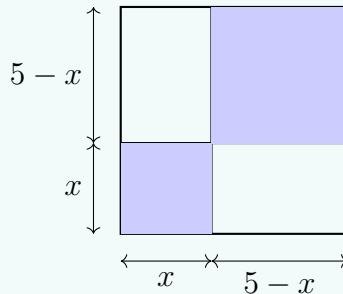
Attention

Le plus délicat, en optimisation, n'est souvent pas la dérivée, mais la **modélisation** : choix de la variable, contraintes, **domaine** et **interprétation** (unités, cohérence).

Exercice 4.1 — Optimiser une aire

Un carré de côté 5

Un carré de côté 5 cm est partagé de sorte que l'aire bleue est modélisée par $g(x)$ avec $x \in [0; 5]$.



1. Montrer que $g(x) = 2x^2 - 10x + 25$.
2. Étudier les variations de g sur $[0; 5]$.
3. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire bleue est minimale.

5 Approximation affine

Point de départ : des tangentes qui « racontent » la variation

Remarque

Idée de départ (approximation affine). Une courbe peut être **approchée** par des droites :

- si l'on trace **beaucoup de tangentes** en des points différents, on a l'impression que « l'ensemble des droites » **décrit** la courbe;
- en réalité, **chaque droite n'approche la courbe que près d'un seul point** : si l'on « zoome » autour d'un point $A(a, f(a))$, la courbe et sa tangente semblent **confondues** au voisinage de

A.

La tangente en a est donc la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a) \quad (h \text{ proche de } 0).$$

Conséquence. La courbe et sa tangente ont le « même comportement » près de A :

- si la tangente est **croissante** (fonction affine croissante), alors son coefficient directeur est **positif** : $f'(a) > 0$ et on s'attend à ce que f **croisse localement** ;
- si la tangente est **décroissante**, alors son coefficient directeur est **négatif** : $f'(a) < 0$ et on s'attend à ce que f **décroisse localement**.

Cela explique pourquoi « variations » et « signe de la dérivée » vont ensemble.

Équation de la tangente

Propriété 5.1: Tangente en a

Soit f dérivable sur un intervalle et a un réel du domaine. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Approximation affine

Propriété 5.2: Approximation affine

Si h est proche de 0, alors

$$f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a).$$

Graphiquement, près de a , la courbe de f se confond avec sa tangente.

Attention

Le symbole \simeq signifie « **approx.** » : l'égalité n'est vraie qu'avec une **erreur** qui dépend de la taille de h . Plus h est petit (plus on est près de a), meilleure est l'approximation.

Exemple

On veut approximer $\sqrt{4,1}$. On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0,1$. Alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$f'(4) = \frac{1}{4}.$$

$$\sqrt{4,1} = f(4,1) \simeq f(4) + 0,1 f'(4) = 2 + 0,1 \times \frac{1}{4} = 2,025.$$

On peut vérifier que cette approximation est très proche de la valeur exacte : $\sqrt{4,1} \approx 2,0248\dots$

Remarque

Cet exemple montre qu'il est possible de calculer mentalement une valeur approchée sans utiliser la calculatrice : on connaît $\sqrt{4} = 2$, et le calcul $0,1 \times \frac{1}{4} = \frac{0,1}{4} = 0,025$ peut se faire de tête. Cette méthode d'approximation linéaire est donc très pratique pour des estimations rapides.

PER — Radar de recul (Étape 2) : vitesse, dérivée approchée et TTC

Pourquoi ajouter la vitesse ?

La règle de l'étape 1 (distance + "on s'approche?") est **utile**, mais elle ne distingue pas deux situations :

- approche **lente** : on a le temps de réagir;
- approche **rapide** : le danger est imminent, même si la distance n'est pas encore très petite.

On cherche donc une information de type **vitesse** : c'est ici que l'approximation affine permet d'estimer une dérivée, même si l'on ne connaît pas l'expression de $d(t)$.

Dérivée (approchée) d'une fonction mesurée

On mesure $d_0 = d(t_0)$ puis $d_1 = d(t_1)$. On pose $h = t_1 - t_0$ (en secondes). Alors le **taux de variation**

$$TV = \frac{d_1 - d_0}{h}$$

donne une **estimation** de la dérivée :

$$d'(t_0) \approx TV.$$

La vitesse d'**approche** est alors $v \approx \max(0, -d'(t_0))$ (positive si l'on se rapproche). Enfin, on définit un indicateur de risque :

$$TTC \approx \frac{d}{v} \quad (\text{Time To Collision}).$$

On ajoute une **3e alarme** : pré-alarme si $TTC < 2$ secondes.

Spécialité NSI — Code complet (3 alarmes : STOP / pre-alarme TTC / approche)

```

1 # Import : acces aux ports et aux sons
2 from hub import port, sound
3
4 # Import : boucle asynchrone, capteur, temps
5 import runloop
6 import distance_sensor
7 import time
8
9 # ----- Reglages -----
10
11 # Temps (ms) entre deux mesures : pas de temps (~ h)
12 INTERVAL_MS = 80
13
14 # Seuil STOP en mm : 50 mm = 5 cm (priorite)
15 STOP_MM = 50
16
17 # Seuil TTC : danger si collision en moins de 2 s
18 TTC_S = 2.0
19
20 # Nb de confirmations consecutives (anti-bruit)
21 HITS_NEEDED = 2
22
23 # ----- Initialisation -----

```

```
24
25 # Première distance (mm) : d(t)
26 d0 = distance_sensor.distance(port.A)
27
28 # Temps associé (ms) : t
29 t0 = time.ticks_ms()
30
31 # Compteur anti-faux déclenchement
32 hits = 0
33
34 # ----- Alarme STOP -----
35
36 async def stop_alarm():
37     # STOP prioritaire tant que distance <= STOP_MM
38     # Sirene : alternance aigu / grave
39     while True:
40
41         # Lire la distance en continu (mm)
42         d = distance_sensor.distance(port.A)
43
44         if d == -1 or d > STOP_MM:
45             return # Sortir si mesure invalide ou si on s'éloigne
46
47         # Bip aigu
48         await sound.beep(1500, 120)
49
50         # Bip grave
51         await sound.beep(800, 120)
52
53 # ----- Programme principal -----
54
55 async def main():
56     # On modifie d0, t0, hits définis plus haut
57     global d0, t0, hits
58
59     while True: # Boucle infinie : le radar tourne en continu
60
61         # Attendre INTERVAL_MS ms (cadence des mesures)
62         await runloop.sleep_ms(INTERVAL_MS)
63
64         # Nouvelle distance mesurée (mm) : d(t+h)
65         d1 = distance_sensor.distance(port.A)
66
67         # Temps courant (ms) : t+h
68         t1 = time.ticks_ms()
69
70         # Si mesure invalide : réinitialiser et recommencer
71         if d0 == -1 or d1 == -1:
72             d0, t0 = d1, t1
73             hits = 0
74             continue
75         # PRIORITE 1 : STOP continu si trop proche
76         if d1 <= STOP_MM:
77             hits = 0
78             await stop_alarm()
```

```
79
80     # Reprendre une reference propre apres le STOP
81     d0 = distance_sensor.distance(port.A)
82     t0 = time.ticks_ms()
83     continue
84
85     # ----- Derivee : taux de variation -----
86
87     # Duree reelle entre les mesures (en ms)
88     dt_ms = time.ticks_diff(t1, t0)
89
90     # Conversion en secondes : h = (t1 - t0)
91     h = dt_ms / 1000
92
93     # Securite : eviter division par zero
94     if h <= 0:
95         d0, t0 = d1, t1
96         continue
97
98     # MINI-RAPPEL MATHS
99     # TV = (d1 - d0) / h
100    # d'(t) ~ TV
101    # v_approche ~ -d'(t)
102
103    # Taux de variation (mm/s) : TV ~ d'(t)
104    d_prime = (d1 - d0) / h
105
106    # Vitesse d'approche (mm/s)
107    # Positive si on se rapproche (distance diminue)
108    v = max(0, -d_prime)
109
110    # ----- TTC : Time To Collision -----
111
112    # Si v > 0 : TTC ~ distance / vitesse (s)
113    if v > 0:
114        ttc = d1 / v
115    else:
116        # Sinon : pas de collision imminente
117        ttc = 999
118
119    # ----- Anti-faux declenchement -----
120
121    # Compter les confirmations consecutives TTC < TTC_S
122    if ttc < TTC_S:
123        hits = hits + 1
124    else:
125        hits = 0
126
127    # ----- Alarmes -----
128
129    # PRIORITE 2 : pre-alarme TTC si confirme
130    if hits >= HITS_NEEDED:
131        await sound.beep(1400, 80)
132        await sound.beep(700, 120)
133
```

```

134 # Sinon : bip simple si on se rapproche
135 elif v > 0:
136     await sound.beep(900, 40)
137
138 # Mise a jour pour l'iteration suivante
139 d0, t0 = d1, t1
140
141 # Demarrer la boucle asynchrone
142 runloop.run(main())

```

6 Algorithmes : méthode de Newton

Définition 6.1: Principe

Pour résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$, on peut construire une suite (x_n) :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Remarque

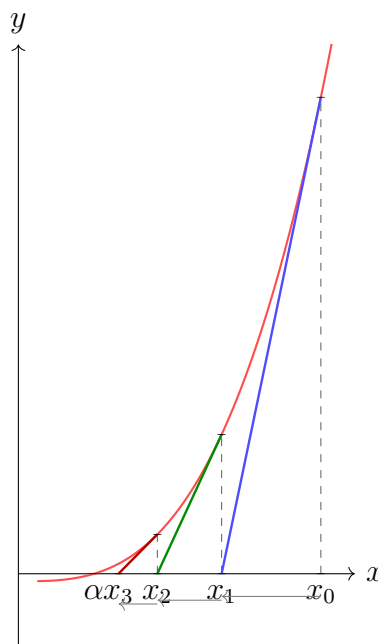
Géométriquement : à partir de x_n , on trace la tangente à la courbe $y = f(x)$; son intersection avec l'axe des abscisses donne x_{n+1} .

Attention

La méthode de Newton donne une **suite d'approximations**. Elle est très efficace si :

- on choisit un **bon point de départ** x_0 (proche de la racine);
- $f'(x_n) \neq 0$ le long du calcul;
- la courbe a une forme « favorable » (souvent : croissante et convexe près de la racine).

Elle peut aussi **échouer** (divergence, oscillations) si x_0 est mal choisi.



Construction de Newton : x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente en x_n avec l'axe des abscisses.

Pseudo-code

1. Choisir une valeur initiale x_0 .
2. Répéter N fois : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
3. S'arrêter quand deux valeurs successives sont très proches.

Exemple

Approximer $\sqrt{2}$ en résolvant $f(x) = x^2 - 2 = 0$. On choisit $x_0 = 1,5$.

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1,5 - \frac{0,25}{3} = 1,416\bar{6}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} \approx 1,4142157$$

(à comparer à $\sqrt{2} \approx 1,4142136$).

Question flash

1. Dans Newton, pourquoi faut-il vérifier que $f'(x_n) \neq 0$?
2. À quoi correspond géométriquement le passage de x_n à x_{n+1} ?
3. Donne un critère d'arrêt : quand peut-on considérer que l'on est « assez proche » de la racine ?

Corrigé flash

1. Dans Newton, on calcule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Il faut donc vérifier que $f'(x_n) \neq 0$ pour **éviter une division par zéro** (et une tangente horizontale inutilisable).
2. Géométriquement, x_{n+1} est l'**abscisse du point d'intersection** entre la tangente à C_f au point $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des abscisses.
3. Critères d'arrêt possibles : $|f(x_n)| < \varepsilon$ ou $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (avec un petit ε).

À vous de jouer !

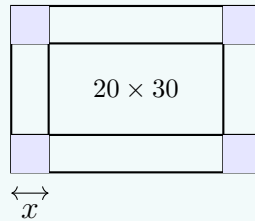
Exercice 6.1 – Position relative

Étudier la position relative des courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$ sur \mathbb{R} .

Exercice 6.2 – Optimisation

Boîte sans couvercle

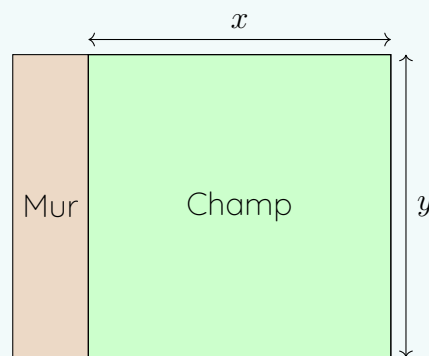
On découpe dans une feuille de carton 20×30 (en cm) quatre carrés de côté x aux coins, puis on plie les bords pour former une boîte (sans couvercle).



1. Exprimer le volume $V(x)$ en fonction de x .
2. Déterminer x pour lequel V est maximal (on se limite à une recherche par dérivation, sur l'intervalle admissible).

Exercice 6.3 – Niveau 4 : Problème ouvert

Un agriculteur souhaite clôturer un champ rectangulaire de 1000 m^2 contre un mur déjà existant (il n'a donc pas besoin de clôturer le côté contre le mur).



1. Exprimer y en fonction de x sachant que l'aire du champ est de 1000 m^2 .
2. Exprimer la longueur L de clôture nécessaire en fonction de x .
3. Déterminer les dimensions qui minimisent la longueur de clôture.

Exercice 6.4 – Niveau 3 : Méthode de Newton

On cherche à résoudre $x^2 - 3 = 0$ (c'est-à-dire trouver $\sqrt{3}$).

1. Appliquer une itération de la méthode de Newton en partant de $x_0 = 2$.
2. Donner une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.

Exercice 6.5 – Niveau 3 : Approximation affine

1. Donner l'approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h proche de 0.
2. En déduire une approximation de $\sqrt{1,02}$ et $\sqrt{0,98}$.
3. Comparer avec les valeurs exactes (calculatrice autorisée).

Exercice 6.6 – Niveau 2 : Étude complète

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f .
4. Déterminer les extremums locaux de f .

Exercice 6.7 – Niveau 2 : Fonction rationnelle

Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. La fonction g admet-elle des extremums locaux ?