

# Dérivation

## Introduction

### Objectifs du chapitre

Ce chapitre introduit un point fondamental du programme de Première : l'étude de la dérivation, du point de vue local (nombre dérivé) et du point de vue global (fonction dérivée).

Nous aborderons le nombre dérivé à partir de l'intuition de la limite du taux de variation, en nous appuyant sur des représentations graphiques, des calculs algébriques dans des cas simples et l'approximation affine.

Le taux de variation et le nombre dérivé seront illustrés dans différents contextes :

- Géométrie (sécante, tangente)
- Physique (vitesse moyenne, vitesse instantanée)
- Économique (accroissement moyen, coût marginal)

Nous préparerons ensuite le chapitre suivant en étudiant le concept de fonction dérivée : dérivabilité sur un intervalle, dérivées des fonctions usuelles, opérations sur les dérivées...

### Capacités attendues

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal...
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente
- Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables

### Démonstrations au programme

- Équation de la tangente en un point à une courbe représentative
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0
- Fonction dérivée de la fonction carrée
- Fonction dérivée de la fonction inverse
- Fonction dérivée d'un produit

# 1 Point de vue local : Taux de variation et nombre dérivé

## Taux de variation et sécantes

### Définition 1.1: Taux de variation

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $I$ . On appelle **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de  $f$  entre  $a$  et  $b$  le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Remarque

Géométriquement, le taux de variation correspond au coefficient directeur de la **sécante**  $(AB)$  à la courbe représentative de  $f$ , où  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$ .

### Exemple

Soit  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Calculons le taux de variation entre 4 et 7 :

$$\frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = \frac{(49 - 21 + 2) - (16 - 12 + 2)}{3} = \frac{30 - 6}{3} = 8.$$

Ainsi, la sécante passant par  $A(4; 6)$  et  $B(7; 30)$  a pour coefficient directeur 8.

## Nombre dérivé

### Définition 1.2: Nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$**  si le taux de variation entre  $a$  et  $a + h$  tend vers un nombre réel lorsque  $h$  tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivé de  $f$  en  $a$**  et est noté  $f'(a)$  :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

### Remarque

On peut aussi écrire cette définition sous la forme :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## Interprétations du nombre dérivé

- **Pente de la tangente** :  $f'(a)$  est la pente de la tangente à la courbe de  $f$  en  $a$ .
- **Vitesse instantanée** : Si  $f(t)$  représente la position d'un mobile à l'instant  $t$ , alors  $f'(a)$  est la vitesse instantanée à l'instant  $t = a$ .
- **Coût marginal** : En économie, si  $C(q)$  est le coût total de production de  $q$  unités, alors  $C'(a)$  est le coût marginal pour produire la  $a$ -ième unité.

## 2 Tangente à une courbe

## Définition de la tangente comme limite des sécantes

### Définition 2.1: Tangente

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ . La **tangente** à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est la droite passant par  $A(a; f(a))$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ . Elle est obtenue comme limite des sécantes  $(AM)$  lorsque  $M$  se rapproche de  $A$  sur la courbe.

## Équation de la tangente

### Théorème 2.1: Équation de la tangente

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ . La tangente  $T_a$  à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Démonstration (au programme). La tangente a pour coefficient directeur  $f'(a)$ , donc son équation est de la forme  $y = f'(a)x + p$ .

Comme elle passe par  $A(a; f(a))$ , on a  $f(a) = f'(a)a + p$ , d'où  $p = f(a) - f'(a)a$ .

Ainsi :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f(a) + f'(a)(x - a).$$

□

### Exemple

Reprenons  $f(x) = x^2$  en  $a = 3$ . On a  $f'(3) = 6$  et  $f(3) = 9$ . L'équation de la tangente en 3 est :

$$y = 9 + 6(x - 3) \quad \text{soit} \quad y = 6x - 9.$$

## 3 Point de vue global : Fonction dérivée

### Définitions

#### Définition 3.1: Fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction  $f$  est dite **dérivable sur un intervalle**  $I$  si elle est dérivable en tout point  $a$  de  $I$ .

#### Définition 3.2: Fonction dérivée

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . La **fonction dérivée** de  $f$ , notée  $f'$ , est la fonction qui à tout  $x \in I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$ .

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

## Dérivées des fonctions usuelles

### Théorème 3.1: Dérivées des fonctions de référence

Fonction $f(x)$	Ensemble de dérivation	Dérivée $f'(x)$
$k$ (constante)	$\mathbb{R}$	0
$x$	$\mathbb{R}$	1
$x^2$	$\mathbb{R}$	$2x$
$x^3$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}$ )	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ , $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$nx^{n-1}$

Démonstration pour la fonction carrée. Soit  $f(x) = x^2$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et  $h \neq 0$  :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $2a + h \rightarrow 2a$ . Donc  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 2a$ .

On en déduit que  $f'(x) = 2x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . □

Démonstration pour la fonction inverse. Soit  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $h \neq 0$  tel que  $a+h \neq 0$  :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{h(a+h)a} = \frac{-h}{h(a+h)a} = \frac{-1}{(a+h)a}.$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $\frac{-1}{(a+h)a} \rightarrow -\frac{1}{a^2}$ . Donc  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ .

On en déduit que  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . □

### La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

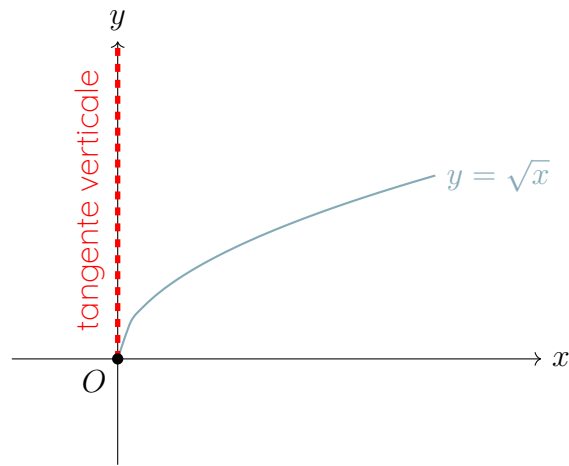
Démonstration (au programme). Considérons  $f(x) = \sqrt{x}$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

Pour  $h > 0$  :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

En utilisant un tableur, ou la calculatrice, on remarque que lorsque  $h \rightarrow 0$  par valeurs positives,  $\frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty$ .

Comme on ne trouve pas une limite finie, on conjecture que  $f$  n'est pas dérivable en 0. Dans ce cours on admet ce résultat.



La tangente à la courbe en 0 est verticale. □

## Opérations sur les fonctions dérivables

### Théorème 3.2: Dérivée d'une somme, d'un produit par un réel

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $\lambda$  un réel.

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(\lambda u)' = \lambda u'$

### Théorème 3.3: Dérivée d'un produit

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$ . Alors  $u \times v$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Démonstration (au programme). Soient  $u$  et  $v$  dérivables en  $a \in I$ . Pour  $h \neq 0$  :

$$\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

On ajoute et retranche  $u(a+h)v(a)$  :

$$\begin{aligned} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a+h)v(a) + u(a+h)v(a) - u(a)v(a)}{h} \\ &= u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a) \end{aligned}$$

Quand  $h \rightarrow 0$  :

- $u(a+h) \rightarrow u(a)$  (car  $u$  est continue en  $a$ )
- $\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \rightarrow v'(a)$
- $\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \rightarrow u'(a)$

Donc la limite est  $u(a)v'(a) + u'(a)v(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ . □

### Théorème 3.4: Dérivée d'un inverse

Soit  $v$  une fonction dérivable sur  $I$  telle que  $v(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ . Alors  $\frac{1}{v}$  est dérivable sur  $I$

et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

### Théorème 3.5: Dérivée d'un quotient

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$  avec  $v(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ . Alors  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

### Théorème 3.6: Dérivée d'une composée par une fonction affine

Soit  $g$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que, pour tout  $x \in I$ ,  $ax + b \in J$ . Alors la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = g(ax + b)$  est dérivable sur  $I$  et :

$$f'(x) = a \times g'(ax + b)$$

#### Exemple

Soit  $f(x) = (4x - 5)^3$ . On a  $f(x) = g(4x - 5)$  avec  $g(x) = x^3$ . Donc :

$$f'(x) = 4 \times 3(4x - 5)^2 = 12(4x - 5)^2.$$

## Fonction valeur absolue

### Définition 3.3: Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

### Propriété 3.1: Dérivabilité de la fonction valeur absolue

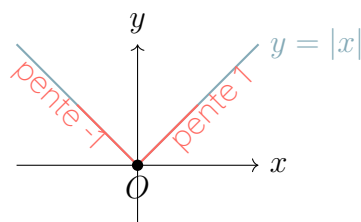
La fonction valeur absolue est :

- dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f'(x) = 1$  pour  $x > 0$
- dérivable sur  $] -\infty; 0[$  et  $f'(x) = -1$  pour  $x < 0$
- non dérivable en 0

Étude en 0. Pour  $h > 0$  :  $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Pour  $h < 0$  :  $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$

Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.



En 0, la courbe présente un point anguleux. □

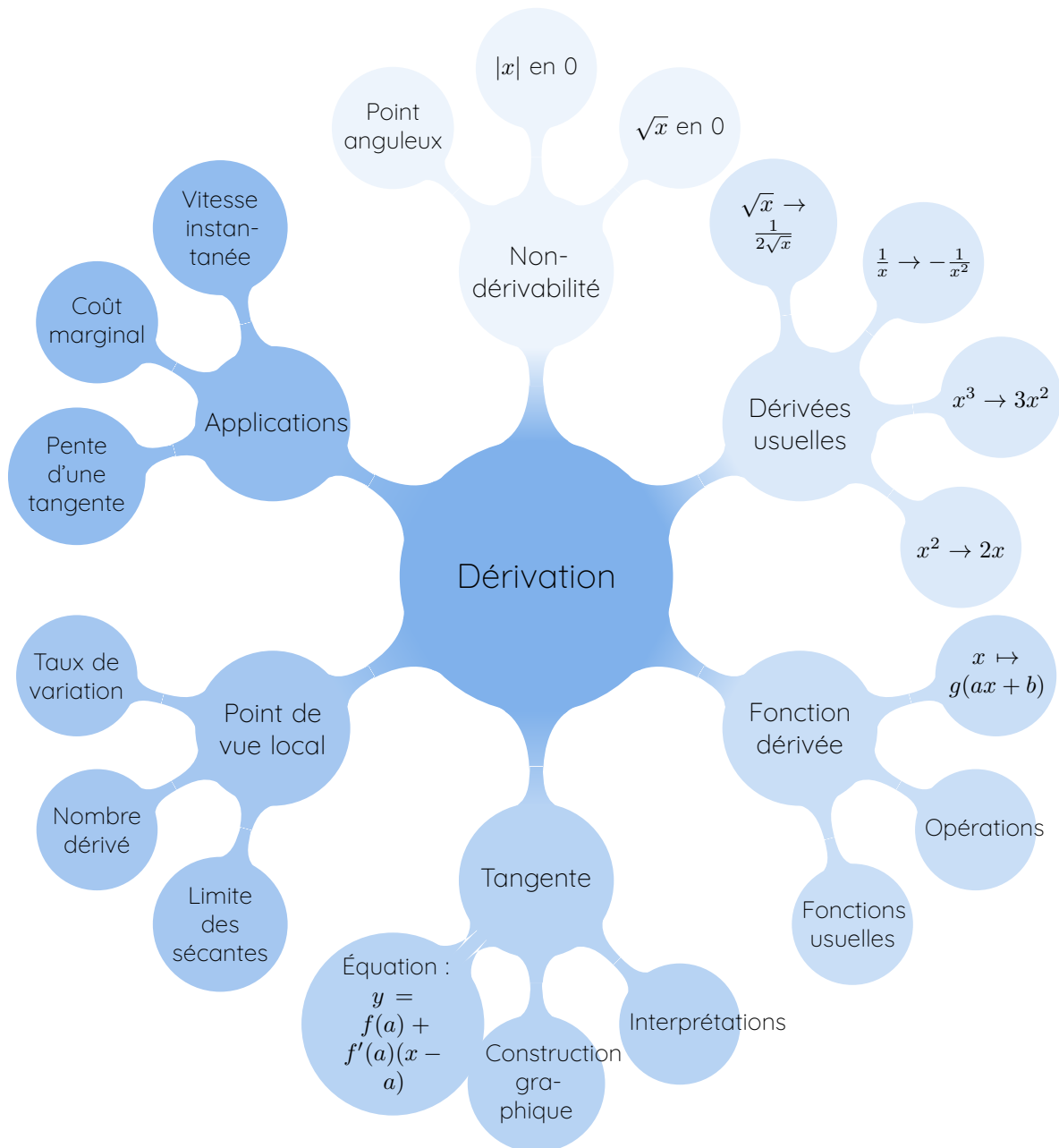
**Exemple (Application numérique)**

Pour  $f(x) = x^2$  en  $a = 3$ , avec  $h$  variant de  $-0.5$  à  $0.5$  par pas de  $0.1$  :

$h$	$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$
-0.5	5.5
-0.4	5.6
-0.3	5.7
-0.2	5.8
-0.1	5.9
0.1	6.1
0.2	6.2
0.3	6.3
0.4	6.4
0.5	6.5

On observe que les valeurs se rapprochent de **6** lorsque  $h$  se rapproche de **0**, ce qui confirme que  $f'(3) = 6$ .

## Carte mentale : Dérivation



## Exercices

### Exercice 3.1 – Calcul de taux de variation

Niveau = ★★★★★

Pour la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , calculer le taux de variation entre :

- 1 et 3
- 2 et  $2 + h$  ( $h \neq 0$ )

### Exercice 3.2 – Nombre dérivé par définition

Niveau = ★★☆☆☆

En utilisant la définition, montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2$  est dérivable en  $a = 2$  et calculer  $f'(2)$ .

### Exercice 3.3 – Équation de tangente

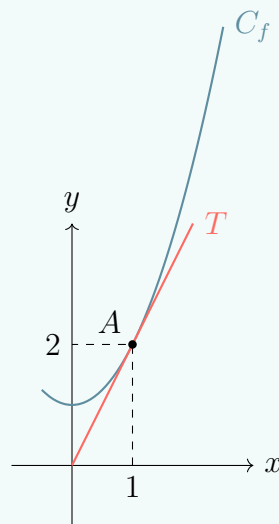
Niveau = ★★☆☆☆

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3$ . Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1.

### Exercice 3.4 – Lecture graphique

Niveau = ★★☆☆☆

La courbe ci-dessous représente une fonction  $f$  et sa tangente  $T$  au point  $A(1; 2)$ .



Déterminer graphiquement  $f(1)$  et  $f'(1)$ .

### Exercice 3.5 – Dérivées de fonctions usuelles

Niveau = ★★☆☆☆

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivation :

- $f(x) = x^5$
- $g(x) = \frac{1}{x^3}$
- $h(x) = \sqrt{x}$

$$4. k(x) = x^{-2}$$

### Exercice 3.6 – Opérations sur les dérivées

Niveau = ★★☆☆

Dériver les fonctions suivantes :

$$1. f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$$

$$2. g(x) = x^2\sqrt{x}$$

$$3. h(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ (sur } \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

$$4. j(x) = (2x+1)(x^2-3)$$

### Exercice 3.7 – Composition par une fonction affine

Niveau = ★★☆☆

Dériver les fonctions suivantes :

$$1. f(x) = (2x+3)^4$$

$$2. g(x) = \sqrt{5x-1}$$

$$3. h(x) = \frac{1}{3x-2}$$

### Exercice 3.8 – Fonction valeur absolue

Niveau = ★★☆☆

Soit  $f(x) = |x|$ .

1. Donner l'expression de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  et sur  $] -\infty; 0[$ .
2. Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0.

### Exercice 3.9 – Problème de vitesse instantanée

Niveau = ★★☆☆

Un mobile se déplace sur une droite. Sa position à l'instant  $t$  (en secondes) est donnée par  $x(t) = t^2 + 3t + 1$  (en mètres).

1. Calculer la vitesse moyenne entre les instants  $t = 1$  et  $t = 4$ .
2. Calculer la vitesse instantanée à l'instant  $t = 2$ .

### Exercice 3.10 – Problème économique - coût marginal

Niveau = ★★☆☆

Le coût total de production de  $q$  unités d'un produit est donné par  $C(q) = 0.1q^2 + 20q + 500$  (en euros).

1. Calculer le coût moyen de production de 50 unités.
2. Calculer le coût marginal pour  $q = 50$ .
3. On décide d'augmenter la production en gardant le même accroissement moyen qu'à la question précédente. Quelle sera la production ?

**Exercice 3.11** — Démonstration - Non-dérivabilité de  $\sqrt{x}$  en 0

Niveau = ★★☆☆

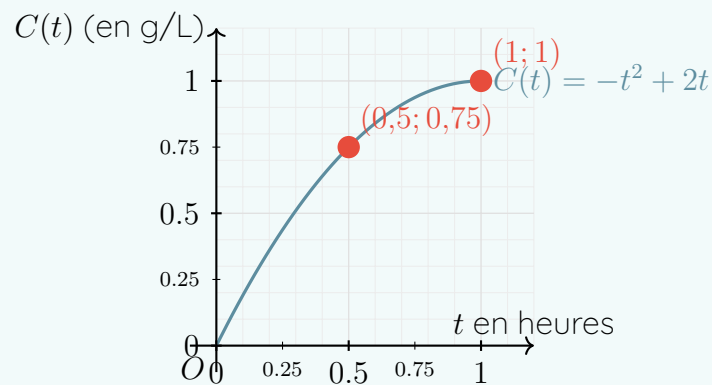
Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$  n'est pas dérivable en 0.**Exercice 3.12** — Démonstration - Dérivée d'un produit

Niveau = ★★☆☆

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables en  $a$ . Démontrer que  $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ .**Exercice 3.13** — Application : alcoolémie

Niveau = ★★☆☆

La courbe ci-après donne la concentration  $C$  d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) d'une personne pendant l'heure qui suit l'ingestion d'un verre d'alcool. Cette courbe correspond à la fonction  $C$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $C(t) = -t^2 + 2t$ .



La concentration  $C(t)$  s'exprime en grammes par litre, et le temps  $t$ , en heures.  
À un instant  $t$  donné,  $C'(t)$  représente la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang.

1. Quelle est la concentration d'alcool dans le sang au bout d'une demi-heure ?
2. a) Justifier que la fonction  $C$  est dérivable sur  $[0 ; 1]$  et déterminer la fonction dérivée  $C'$ .  
b) En déduire la vitesse d'apparition d'alcool à l'instant  $t = 0,5$ , c'est-à-dire une demi-heure après l'ingestion d'alcool, puis à l'instant  $t = 1$ , c'est-à-dire une heure après.  
c) À quel instant cette vitesse semble-t-elle maximale ? Justifier la réponse.