Chapitre 3 19 mai 2026

Probabilités conditionnelles et indépendance

Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre reprend les notions vues en seconde sur les probabilités afin de mettre en place la notion de probabilité conditionnelle.
Celle-ci est d'abord introduite à partir du langage courant : on manipule le vocabulaire, les notations et on calcule des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau d'effectifs.
On découvre ensuite les arbres pondérés (en s'appuyant sur la notion d'arbre de dénombrement vue en seconde) et les différentes règles permettant de calculer des probabilités avec ceux-ci sont introduites en s'appuyant sur les proportions. Un vaste choix d'exercices permet de s'exercer et notamment d'appréhender la problématique de l'inversion du conditionnement.
Dans une dernière partie, on découvre la notion d'indépendance de deux événements ainsi que les successions d'épreuves indépendantes dont l'étude sera développée en terminale via la loi binomiale.

Capacités

- Calculer des probabilités conditionnelles dans un tableau à double entrée
- Reconnaître et utiliser les probabilités conditionnelles (ou non) dans un énoncé
- Utiliser un arbre pondéré pour modéliser une situation
- Inverser un conditionnement (formule des probabilités totales)
- Utiliser l'indépendance de deux événements
- Représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau
- Calculer des probabilités dans des situations complexes
- Résoudre des problèmes concrets faisant intervenir les probabilités conditionnelles

Contenus

- Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

1 Probabilités conditionnelles

Définition et notation

Définition 1.1: Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements d'un univers Ω, avec $P(B) \neq 0$.
La **probabilité conditionnelle** de A sachant B est le nombre :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On note aussi $P(A|B)$
Sans passer par la formule, $P_B(A)$ est la proportion de A dans B (sous la condition B).

Remarque
La probabilité conditionnelle $P_B(A)$ se lit « probabilité de A sachant B » et représente la probabilité que A se réalise lorsqu'on sait que B est réalisé.

Exemple (Situation concrète)
Dans un lycée de 1000 élèves :
400 élèves font de l'allemand, 300 élèves font de l'espagnol, 100 élèves font les deux langues.
On choisit un élève au hasard. Soit :

- A : « l'élève fait de l'allemand »
- E : « l'élève fait de l'espagnol »

$$P(A) = \frac{400}{1000} = 0,4$$
$$P(E) = \frac{300}{1000} = 0,3$$
$$P(A \cap E) = \frac{100}{1000} = 0,1$$
$$P(A \cup E) = \frac{600}{1000} = 0,6$$

Probabilité de faire de l'espagnol sachant qu'on fait de l'allemand :

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

Probabilité de faire de l'allemand sachant qu'on fait de l'espagnol :

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1}{0,3} \approx 0,333$$

Tableau à double entrée

Propriété 1.1: Utilisation d'un tableau

Un tableau à double entrée (ou tableau de contingence) permet de calculer facilement des probabilités conditionnelles.

Exemple (Étude médicale)
Une étude porte sur 800 patients testés pour une maladie :

	Malade (M)	Non malade ($\overline{M}$)	Total
Test positif (T)	70	10	80
Test négatif ($\overline{T}$)	8	712	720
Total	78	722	800

Partition de l'univers : Les 4 cases grisées forment une partition complète des 800 patients.

- **Sensibilité du test :** $P_T(M) = \frac{70}{80} = 0,875$
- **Spécificité du test :** $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{712}{720} \approx 0,989$
- **Valeur prédictive positive :** $P_M(T) = \frac{70}{78} \approx 0,897$
- **Valeur prédictive négative :** $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{712}{722} \approx 0,986$

2 Arbres pondérés

Construction et règles

Définition 2.1: Arbre pondéré

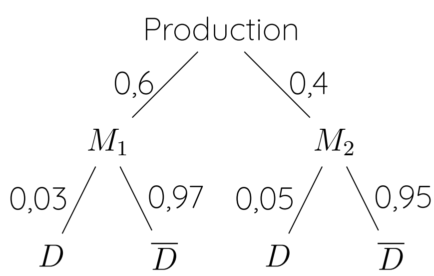
Un **arbre pondéré** est un arbre de probabilités où :

- Chaque branche est étiquetée avec une probabilité
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches

Théorème 2.1: Règles des arbres pondérés

1. **Règle du produit :**
   La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin
2. **Règle de la somme :**
   La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent

Exemple (Processus industriel)
Une usine possède deux machines M_1 et M_2 qui produisent respectivement 60% et 40% de la production totale.
Le taux de pièces défectueuses est de 3% pour M_1 et 5% pour M_2.



- $P(M_1 \cap D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$
- $P(M_2 \cap D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$
- $P(D) = 0,018 + 0,02 = 0,038$ (probabilité totale)
- Calculer $P_D(M_1)$

Formule des probabilités totales

Théorème 2.2: Probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une **partition** de l'univers Ω (ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω), alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

Ou encore, si $P(B_i) \neq 0$ pour tout i :

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + P(B_2) \times P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n) \times P_{B_n}(A)$$

3 Indépendance

Définition et propriétés

Définition 3.1: Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété 3.1: Caractérisations de l'indépendance

Si $P(B) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_B(A) = P(A)$$

De même, si $P(A) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B)$$

Remarque
L'indépendance signifie que la réalisation d'un événement n'influe pas sur la probabilité de l'autre.

Exemple (Lancers de dés)
On lance deux dés équilibrés. Soit :

- A : « le premier dé montre un 6 »
- B : « le deuxième dé montre un 6 »
- C : « la somme des deux dés est 6 »

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{5}{36}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(B) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$
$$P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{216} \Rightarrow A \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants}$$

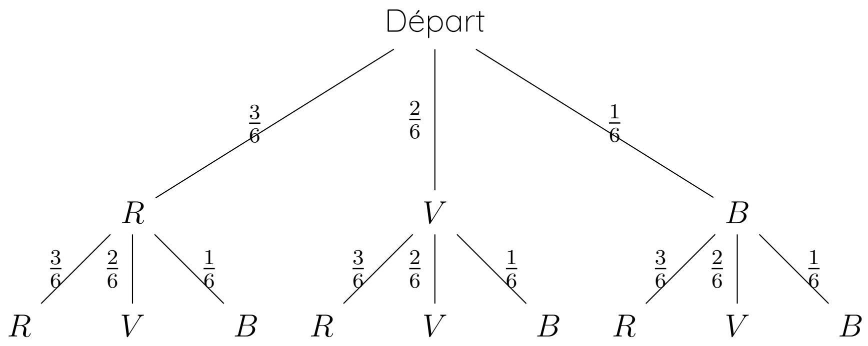
Successions d'épreuves indépendantes

Définition 3.2: Épreuves indépendantes

Des épreuves sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur les résultats des autres.

Exemple (Tirages successifs avec remise)

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et 1 boule bleue. On tire successivement 2 boules avec remise.



Soit les événements suivants : A = "Avoir une boule verte au premier tirage" ; B = "Avoir une boule rouge au deuxième tirage", C = "Avoir deux boules rouge" et D = "Avoir une boule rouge et une boule verte"

- A et B sont indépendants
- C et D ne sont pas indépendants

4 Indépendance et événements contraires

Propriété 4.1: Indépendance des événements contraires

Si A et B sont deux événements indépendants, alors :

- $\overline{A}$ et B sont indépendants
- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Démonstration. Démontrons que $\overline{A}$ et B sont indépendants lorsque A et B le sont.
On a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
Si A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$
Ainsi, $\overline{A}$ et B sont indépendants.
Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Remarque

Cette propriété est très utile dans les calculs de probabilités. Elle signifie que si deux événements sont indépendants, alors la réalisation ou non de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de l'autre.

Exemple (Application pratique)

On lance deux dés équilibrés. Soit :

- A : « le premier dé montre un 6 »

- B : « le deuxième dé montre un 6 »

On sait que A et B sont indépendants.

- Quelle est la probabilité que le premier dé ne soit pas un 6 sachant que le deuxième est un 6 ?

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A}) \times P(B)}{P(B)} = P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$$

- Quelle est la probabilité qu'aucun dé ne montre un 6 ?

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

- Sans passer par les formules, utiliser ce tableau à double entrée pour retrouver les mêmes valeurs.

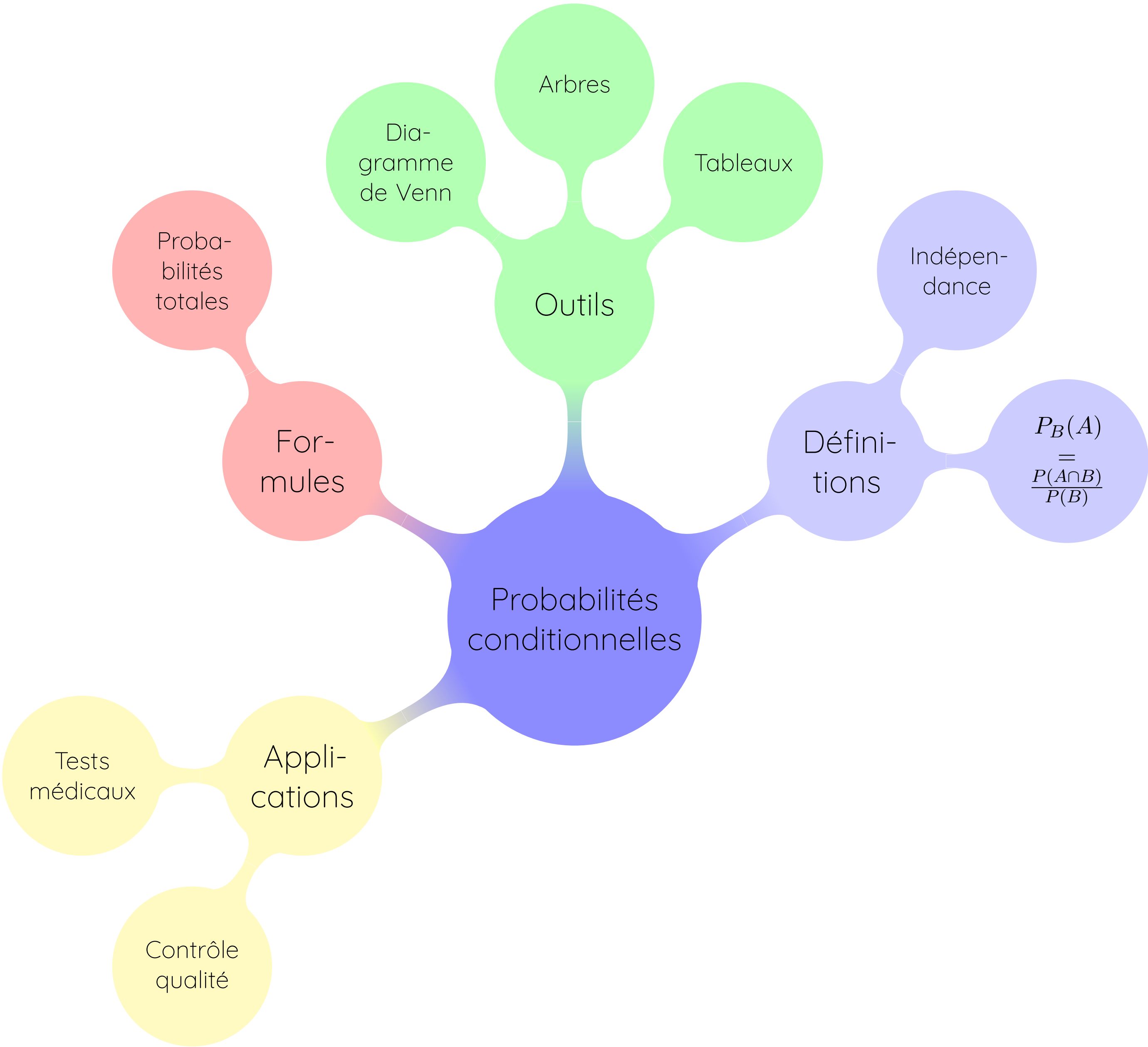
Tableau des résultats possibles (Dé 1 × Dé 2)

	1	2	3	4	5	6
1	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×	×
3	×	×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	×	×
5	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	(6,6)

Explication :

- Il y a 36 cases au total
- 1 seule case correspond à (6,6) : $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$
- 5 cases sur la ligne 6 correspondent à $A \cap \overline{B}$: (6,1) à (6,5)
- 5 cases sur la colonne 6 correspondent à $\overline{A} \cap B$: (1,6) à (5,6)
- 25 cases correspondent à $\overline{A} \cap \overline{B}$: toutes sauf la dernière ligne et dernière colonne

Carte mentale



Exercices

Exercice 4.1 — Chaîne de production

Niveau = ★☆☆☆☆

Une usine a trois ateliers A, B, C produisant respectivement 50%, 30% et 20% des pièces. Les taux de défauts sont de 1% pour A, 2% pour B et 3% pour C. Une pièce est choisie au hasard.

1. Modéliser la situation par un arbre
2. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
3. Sachant qu'elle est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'atelier A ?

Exercice 4.2 — Vérification

Niveau = ★★☆☆☆

On considère deux événements A et B indépendants avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

1. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$
2. Calculer $P(A \cap \overline{B})$
3. Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
4. Vérifier que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$

Exercice 4.3 — Test de dépistage

Niveau = ★★★☆☆

Un test de dépistage a une sensibilité de 95% et une spécificité de 98%. La prévalence de la maladie dans la population est de 2%. Calculer la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade.

Exercice 4.4 — Double six conditionnel

Niveau = ★★★☆☆

Un joueur lance deux dés équilibrés. Il annonce qu'au moins un des deux dés affiche un 6. Quelle est la probabilité que les deux dés affichent un 6 (double six) ?

Exercice 4.5 — Le dé truqué

Niveau = ★★★☆☆

Vous avez deux dés en apparence identiques. L'un est équilibré, l'autre est truqué et donne un 6 avec probabilité 1/2. Vous choisissez un dé au hasard et le lancez. Il montre un 6. Quelle est la probabilité que ce soit le dé truqué ?

Exercice 4.6 — Indépendance

Niveau = ★★★☆☆

On lance deux dés équilibrés. Les événements suivants sont-ils indépendants ?

1. A : « la somme est paire » et B : « le premier dé montre un nombre pair »
2. C : « la somme est 7 » et D : « le premier dé montre 4 »

Exercice 4.7 — Dragées

Niveau = ★★★★☆

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres pas :

- 30 % des dragées contiennent une amande ;
- 40 % des dragées avec amande sont bleues et les autres roses ;
- 25 % des dragées sans amande sont roses et les autres bleues.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les événements :

- A : « La dragée choisie contient une amande. »
- B : « La dragée choisie est bleue. »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que $p(A \cap B) = 0,12$.
3. Calculer $p(B)$ puis en déduire $p_B(A)$.
4. Calculer $p_{\overline{B}}(A)$.
5. Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou rose ?

Exercice 4.8 — Beignets

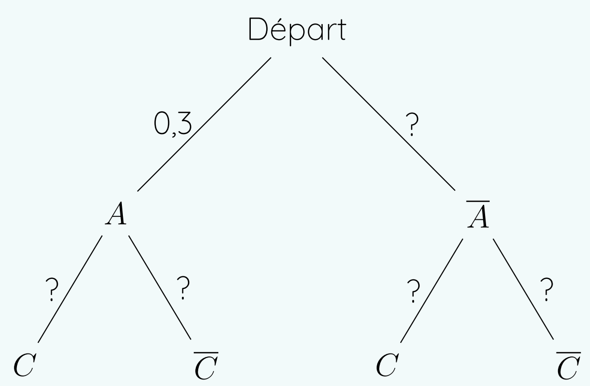
Niveau = ★★★☆☆

Le cuisinier d'une colonie de vacances a confectionné des beignets pour le goûter :

- 30 % des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35 % des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45 % des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard et on définit les événements A : « Le beignet choisi est à l'ananas » et C : « Le beignet choisi est aromatisé à la cannelle ».

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 4.9 — sujet Bac Scientifique Liban 2018 (adapté)

Niveau = ★★★★★

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la n-ième partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

   Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   (c) On suppose que la suite (p_n) converge vers $\frac{2}{5}$ Interpréter ce résultat.

Exercice 4.10 — Le test piégé

Niveau = ★★★★★

Lors d'un QCM, un étudiant doit répondre à une question à choix multiple avec 4 réponses possibles, dont une seule est correcte. L'étudiant choisit au hasard une réponse. Avant de révéler la bonne réponse, le professeur élimine deux mauvaises réponses parmi les trois restantes. L'étudiant a-t-il intérêt à changer son choix initial ?