Chapitre 1 01 Novembre 2025

Second degré

Introduction

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions polynômes de degré 2, en diversifiant les registres (algébrique, graphique).
Dans un premier temps, nous étudierons les fonctions polynômes de degré 2 (forme canonique et sens de variations). Puis nous allons découvrir comment résoudre les équations du second degré. Enfin nous verrons les différentes propriétés des fonctions polynômes de degré 2 (somme et produit des racines, factorisation et signe).
Dans tout le chapitre, nous allons apprendre à résoudre des problèmes variés (équation, inéquation, variations, optimisation) en utilisant les propriétés adaptées vues dans le cours.

Capacités

- Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré dans des cas simples.
- Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré, déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole.
- Résoudre une équation du second degré.
- Utiliser les propriétés des racines (somme et produit des racines et factorisation).
- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré et résoudre des inéquations.
- Choisir la forme adaptée pour résoudre un problème.

Le bulletin officiel de l'éducation nationale

L'étude des fonctions polynômes du second degré réactive les connaissances acquises en seconde (fonction carré, identités remarquables) qu'elle permet de consolider. Il est important de diversifier les registres (algébrique, graphique) et de mettre en valeur les interactions avec l'ensemble du programme : problèmes variés, notamment d'origine géométrique, se ramenant à une équation du second degré ou à l'étude d'une fonction polynôme du second degré (optimisation, variations).
On illustre avec les fonctions polynômes du second degré des notions générales sur les fonctions (taux de variation, calcul de la fonction dérivée, position du graphe de $x \mapsto f(x-m)$ et on fait le lien avec la variance en probabilités et statistique.
Les élèves doivent savoir qu'une fonction polynôme du second degré admet une forme canonique, et être capables de la déterminer dans des cas simples à l'aide de l'identité

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

(méthode de complétion du carré). Le calcul effectif de la forme canonique dans le cas général n'est pas un attendu du programme.
Les élèves sont entraînés à reconnaître et pratiquer la factorisation directe dans les cas qui s'y prêtent : racines apparentes, coefficient de x nul, racines entières détectées par calcul mental à partir de leur somme et de leur produit.

1 Forme canonique d'une fonction polynomiale de degré 2

Polynôme de degré 2, fonction polynomiale de degré 2

Définition 1.1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une **fonction polynomiale de degré 2** si et seulement si il existe trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$), tels que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{(forme développée réduite)}$$

On appelle **polynôme de degré 2** toute expression $f(x)$ de f.

Exemple (Vérification du degré)

- $f(x) = x^2 - 5x - x^3$ est un polynôme de degré 3 et non pas 2.
- $g(x) = (x+8)^2 + 3 = x^2 + 16x + 67$ est un polynôme de degré 2 ($a = 1$, $b = 16$, $c = 67$)
- $h(x) = (2x+8)^2 - 4x^2 = 32x + 64$ n'est pas un polynôme de degré 2 ($a = 0$)

Propriété 1.1

La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2, dans un repère,
est une **parabole**.

Forme canonique

Définition 1.2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Il existe α et β réels, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction f.

Remarque

On a les relations :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

Exemple (Détermination de la forme canonique)

Exemple 1 : $f(x) = 3x^2 + 12x - 1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 + 12x - 1 \\
f(x) &= 3(x^2 + 4x) - 1 \\
f(x) &= 3[(x+2)^2 - 4] - 1 \\
f(x) &= 3(x+2)^2 - 12 - 1 \\
f(x) &= 3(x+2)^2 - 13 \\
f(x) &= 3(x - (-2))^2 + (-13)
\end{aligned}$$

une étape facultative mais utile !

a = 3, $\alpha = -2$ et $\beta = -13$

Exemple 2 : $g(x) = -x^2 - 20x + 1881$

$$\begin{aligned}
g(x) &= -x^2 - 20x + 1881 \\
g(x) &= -(x^2 + 20x) + 1881 \\
g(x) &= -(x^2 + 2 \times x \times 10 + 10^2 - 10^2) + 1881 \\
g(x) &= -[(x+10)^2 - 10^2] + 1881 \\
g(x) &= -(x+10)^2 + 100 + 1881 \\
g(x) &= -(x+10)^2 + 1981 \\
g(x) &= -(x - (-10))^2 + 1981
\end{aligned}$$

a = -1, α = -10 et β = 1981

Sens de variation

Théorème 1.1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.

- Si $a > 0$:

  Tableau de variation (cas $a > 0$) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

- Si $a < 0$:

  Tableau de variation (cas $a < 0$) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

2 Équation du second degré, discriminant

Définition

Définition 2.1

On appelle **équation du second degré** toute équation pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = 0$ avec f une fonction polynomiale de degré 2.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées **racines du polynôme** $f(x)$.

Exemple

- $27x^2 + 8x = -1981$
- $2x^2 + x^3 = 40x^2 - 1 + x^3$

Résolution dans $\mathbb{R}$

Définition 2.2

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré, avec a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** de ce polynôme le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 2.1

Soit $f(x)$ un polynôme de degré 2 de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.
Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution :

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Exemple (Résolution d'équations)

Exemple 1 : $3x^2+12x-15=0$

$$\begin{aligned} 3x^2+12x-15&=0 \\ 3[(x+2)^2-9]&=0 && \text{passage à la forme canonique (ou presque)} \\ 3[(x+2)^2-3^2]&=0 \\ 3(x+2-3)(x+2+3)&=0 && \text{factorisation par produit remarquable} \\ 3(x-1)(x+5)&=0 && \text{équation à produit nul} \\ \text{donc } x=1 \quad \text{ou} \quad x&=-5 \end{aligned}$$

Exemple 2 : $2x^2=40x-250$

$$\begin{aligned} 2x^2-40x+250&=0 \\ 2[(x-10)^2+25]&=0 \end{aligned}$$

Aucune solution réelle car $(x-10)^2+25>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Factorisation

Théorème 2.2

Soit $f(x)$ un polynôme de degré 2 de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a, b et c trois réels et $a\neq 0$. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta>0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

- Si $\Delta=0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=a(x-x_1)^2$$

- Si $\Delta<0$, alors $f(x)$ n'est pas factorisable.

Somme et produit des racines

Théorème 2.3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a, b et c trois réels et $a\neq 0$ et $\Delta\geq 0$.
Soit x_1 et x_2 les racines de $f(x)$.

- $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
- $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

3 Signe du trinôme

Théorème 3.1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$: $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_1$.
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple (Tableau de signe)
Soit $g(x) = x^2 - x - 2 = ... = (x - (-1))(x - 2)$. Les racines sont -1 et 2.
Tableau de signe de g (avec $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4 Allure de la courbe et forme canonique

Remarque
Tracer l'allure d'une parabole à partir de sa forme canonique
Pour tracer l'allure d'une parabole d'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$:

- **Sommet** : Le point $S(\alpha; \beta)$ est le sommet de la parabole
- **Orientation** :
  - Si $a > 0$: la parabole est tournée vers le haut (forme "U")
  - Si $a < 0$: la parabole est tournée vers le bas (forme "n")
- **Écartement** :
  - Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est "étroite"
  - Plus $|a|$ est petit, plus la parabole est "large"
- **Axe de symétrie** : La droite verticale d'équation $x = \alpha$
- **Points particuliers** : Calculer quelques valeurs autour de α pour préciser le tracé

Translation des paraboles
Si $g(x) = f(x - \alpha)$, alors la courbe C_f est obtenue par translation de la courbe C_g du vecteur $\alpha\vec{i}$:

$$C_f = T_{\alpha\vec{i}}(C_g)$$

Cela signifie que pour obtenir C_f, on décale C_g horizontalement de α unités :

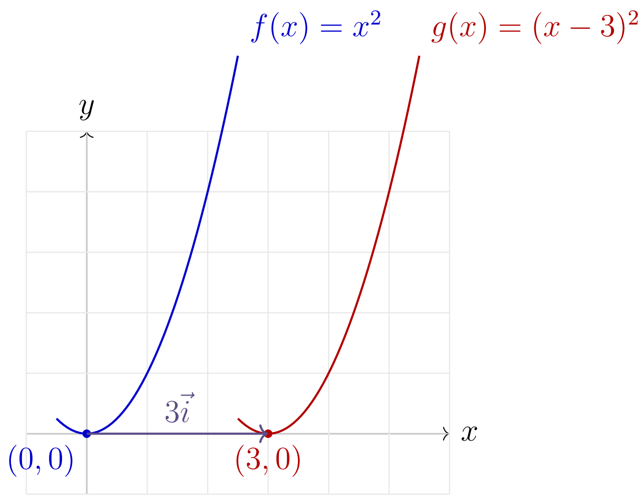
- Si $\alpha > 0$: translation vers la droite
- Si $\alpha < 0$: translation vers la gauche

De même, si $h(x) = f(x) + \beta$, alors C_h est la translation de C_f du vecteur $\beta\vec{j}$ (décalage vertical).
La forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ combine ces deux translations :

- Translation horizontale de α unités
- Translation verticale de β unités

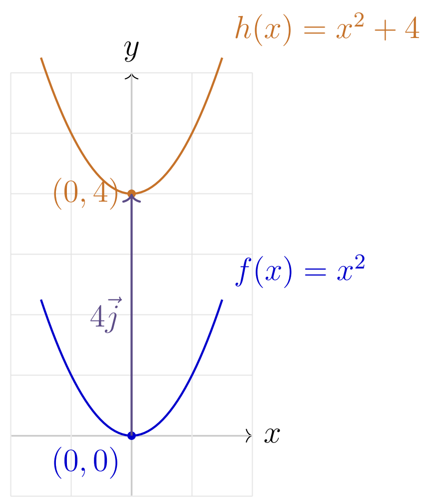
Exemple (Translation de paraboles)
Comparons $f(x) = x^2$ et $g(x) = (x-3)^2$:

- $g(x) = f(x-3)$
- Donc C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $3\vec{i}$
- Le sommet de f est $(0;0)$, celui de g est $(3;0)$



De même, pour $h(x) = x^2 + 4$:

- $h(x) = f(x) + 4$
- C_h est l'image de C_f par la translation de vecteur $4\vec{j}$
- Le sommet de h est $(0;4)$

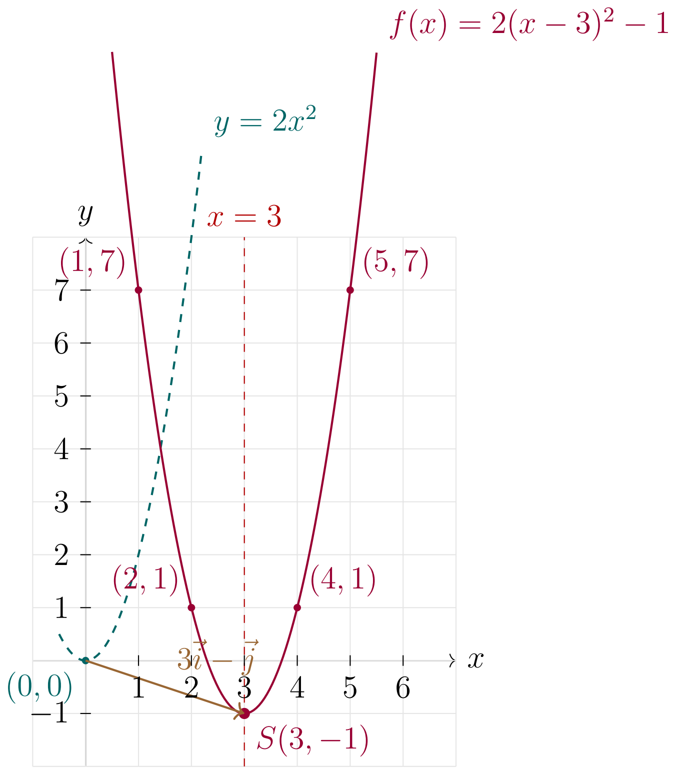


Exemple (Tracé à partir de la forme canonique)
Soit $f(x) = 2(x-3)^2 - 1$.

- **Sommet** : $S(3;-1)$
- **Orientation** : $a = 2 > 0$, donc parabole tournée vers le haut
- **Axe de symétrie** : $x = 3$

- **Points** :

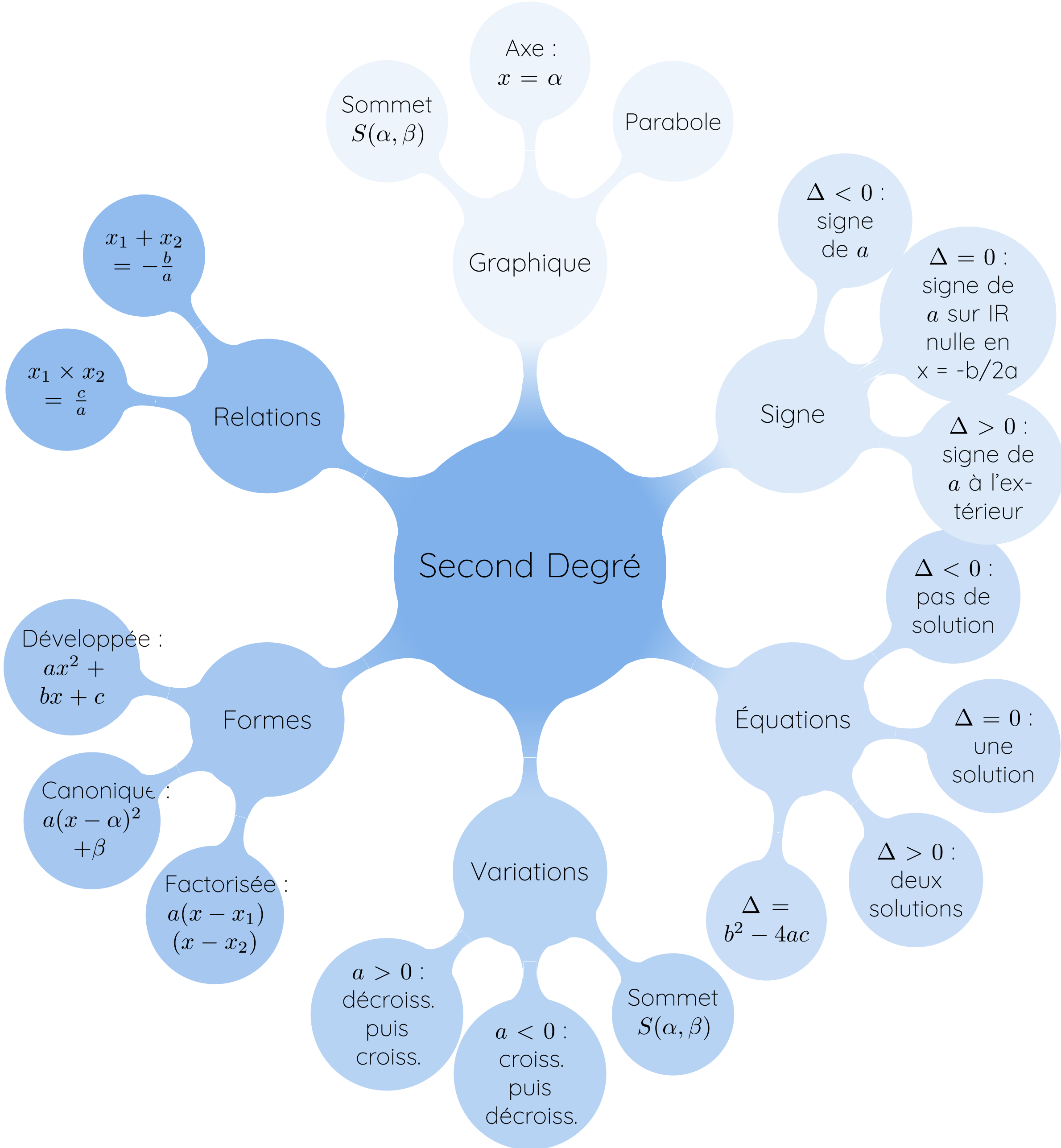
$$f(2) = 2(2-3)^2 - 1 = 1$$
$$f(4) = 2(4-3)^2 - 1 = 1$$
$$f(1) = 2(1-3)^2 - 1 = 7$$
$$f(5) = 2(5-3)^2 - 1 = 7$$



Cette parabole est la translation de la parabole $y = 2x^2$ par le vecteur $3\vec{i} - \vec{j}$.

- Le sommet $(0, 0)$ de $y = 2x^2$ est déplacé en $(3, -1)$
- Tous les points suivent la même translation
- La forme et l'orientation restent identiques

Second degré



Exercices

Exercice 4.1 — Reconnaissance de formes

Niveau = ★☆☆☆☆

Pour chaque fonction, déterminer si c'est une fonction polynomiale de degré 2 et si oui, donner ses coefficients :

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$
2. $g(x) = (x-1)(x+3)$
3. $h(x) = 3x - 2$
4. $k(x) = (2x-1)^2 - 4x^2$

Exercice 4.2 — Forme canonique

Niveau = ★☆☆☆☆

Donner la forme canonique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$
2. $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$
3. $h(x) = -x^2 + 2x + 3$

Exercice 4.3 — Résolution d'équations

Niveau = ★★★☆☆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^2 + 3x - 2 = 0$
3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
4. $x^2 + x + 1 = 0$

Exercices d'application directe

Exercice 4.4 — Formes d'un polynôme

Niveau = ★☆☆☆☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 27$.

1. Déterminer la forme canonique de f, en utilisant les identités remarquables.
2. Déterminer la forme factorisée de f, en utilisant les identités remarquables.
3. En utilisant la forme adaptée, résoudre :
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = -27$
   (c) $f(x) = -36$
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
   (a) Vérifier que 1 est racine de g.

(b) En utilisant la somme ou le produit des racines déterminer la valeur de l'autre racine de g.

5. Résoudre $f(x) < g(x)$.

Exercice 4.5 — Étude complète d'une fonction

Niveau = ★★☆☆☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 7x + 15$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner la forme factorisée et la forme canonique de f.
4. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
5. Résoudre $f(x) < 0$.
6. Déterminer l'image de 2 par la fonction f.
7. -70 a-t-il des antécédents par la fonction f ? Si oui, les déterminer.
8. 25 a-t-il des antécédents par la fonction f ? Si oui, les déterminer.

Exercice 4.6 — Représentation graphique et parabole

Niveau = ★★★★☆

On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 + 2x - 1,5$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Exercice 4.7 — Représentation graphique et parabole (suite)

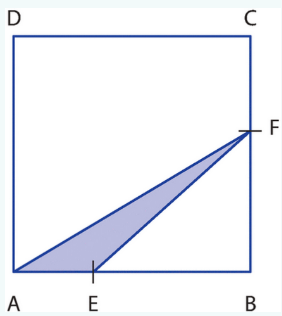
Niveau = ★★★★☆

On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 + 2x - 1,5$.

1. Déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole avec la droite d'équation $y = 2x - 1$. Préciser leurs coordonnées.

Exercice 4.8 — Problème d'optimisation géométrique

Niveau = ★★★★☆



Soit ABCD un carré de côté 5. Soit E un point appartenant à [AB] et F un point appartenant à

[BC] tels que AE = CF = x.
On note $A(x)$ l'aire du triangle AEF.

1. À quel intervalle x appartient-il ?
2. Déterminer l'expression de $A(x)$ en fonction de x.
3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ?
4. Pour quelle valeur de x a-t-on $A(x) = 2,75$ cm^2 ?

Exercice 4.9 — Résolution d'inéquation rationnelle

Niveau = ★★★☆☆

Résoudre $\frac{2t}{1-t} > \frac{t+2}{t}$, en étudiant le signe de $\frac{2t}{1-t} - \frac{t+2}{t}$.

Exercice 4.10 — Démonstration somme et produit

Niveau = ★★☆☆☆

On veut montrer que deux nombres ayant pour somme s et pour produit p sont solutions de $x^2 - sx + p = 0$.
Soit a et b deux nombres ayant pour somme s et pour produit p.

1. Montrer que a est solution de $x^2 - sx + p$.
2. Montrer que b est solution de $x^2 - sx + p$.
3. Utiliser la propriété démontrée ci-dessus pour déterminer deux nombres ayant pour somme 10 et pour produit 23,04.

Exercices avancés

Exercice 4.11 — Équation paramétrique

Niveau = ★★★☆☆

On considère l'équation $(m+8)x^2 + mx + 1 = 0$.
Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle une unique solution ?

Exercice 4.12 — Résolution d'équations du troisième degré

Niveau = ★★★☆☆

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
   On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (a) Vérifier que 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Montrer que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $(x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$. Déterminer a, b et c.
   (c) Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
   (d) En déduire toutes les solutions de $f(x) = 0$, et la forme factorisée de f.

Exercice 4.13 — Résolution d'équations du troisième degré (suite)

Niveau = ★★★☆☆

2. Résoudre $2x^3 - 20x^2 - 618x + 1\,980 = 0$.

(a) Vérifier que 3 est solution, puis factoriser par $(x-3)$.

(b) En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 4.14 — Position relative parabole-droite

Niveau = ★★☆☆☆

On veut étudier la position relative d'une parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et d'une droite d'équation $y = 5x - 3$.

1. Déterminer le ou les points d'intersection de la parabole et de la droite.
2. On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$.
   (a) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   (b) En déduire la position relative de la parabole et de la droite.

Exercice 4.15 — Position relative de deux paraboles

Niveau = ★★☆☆☆

On veut étudier la position relative de deux paraboles, l'une d'équation $y = 3x^2 - 5x - 20$ et l'autre d'équation $y = x^2 - 3x - 2,5$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les éventuels points d'intersection et la position relative des deux paraboles.
2. Démontrer la conjecture.

Exercice 4.16 — Intersection parabole-droites

Niveau = ★★☆☆☆

On considère la parabole d'équation $y = 4x^2 - 8x + 7$ et k un réel quelconque.

1. Déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole et de la droite d'équation $x = k$. Préciser leurs coordonnées.
2. Déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole et de la droite d'équation $y = k$. Préciser leurs coordonnées. (On distinguera différents cas selon les valeurs de k.)

Exercice 4.17 — Modélisation économique (Partie 1)

Niveau = ★★★☆☆

Un artisan fabrique des boîtes. Le coût de fabrication de x boîtes est donné par $f(x) = 0,23x^2 + 4x + 300$.

1. Calculer le coût de fabrication de 20 boîtes.
2. Exprimer la recette $R(x)$ si chaque boîte est vendue 50€.
3. Exprimer le bénéfice $B(x)$.
4. Calculer le bénéfice pour 20 boîtes.
5. Étudier les variations de B et déterminer le bénéfice maximal.

Exercice 4.18 — Modélisation économique (Partie 2)

Niveau = ★★★☆☆

Un artisan fabrique des boîtes. Le coût de fabrication de x boîtes est donné par $f(x) = 0,23x^2 + 4x + 300$ et le bénéfice est $B(x) = -0,23x^2 + 46x - 300$.

6. Pour quelles quantités le bénéfice est-il de 1425€ ?
7. Peut-on atteindre un bénéfice de 3000€ ?
8. Déterminer la plage de production rentable.