

Suites numériques

Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est le premier de la partie Algèbre. Son objectif est d'introduire et d'étudier la notion de suites, qui est une nouvelle notion vue en première.

Dans un premier temps, nous présentons les généralités sur les suites : comment définir une suite et comment la représenter graphiquement. Dans un deuxième temps, nous étudions quelques suites particulières : les suites arithmétiques et géométriques. Nous allons également voir comment calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Enfin, nous étudions les propriétés des suites : étude de variations et notion de limite d'une suite.

Capacités

- Calculer les termes d'une suite
- Modéliser avec une suite
- Représenter graphiquement une suite
- Reconnaître une suite arithmétique et calculer le terme général
- Reconnaître une suite géométrique et calculer le terme général
- Calculer les sommes de termes pour des suites arithmétiques et géométriques
- Étudier les variations d'une suite
- Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

Le bulletin officiel de l'éducation nationale

En classe de première, les suites sont présentées d'un point de vue principalement algébrique. L'objectif est que l'élève soit confronté à des systèmes discrets pour lesquels les suites numériques apparaissent comme modélisation adaptée. C'est aussi l'occasion d'aborder le concept de définition par récurrence.

Les élèves rencontrent différents modes de génération de suites :

- **par une formule explicite** $u_n = f(n)$;
- **par une relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$;
- **par des motifs géométriques ou combinatoires.**

Les suites arithmétiques et géométriques sont formalisées. Les suites interviennent comme modélisations d'évolutions à temps discret rencontrées dans les autres disciplines : évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une population, décroissance radioactive.

L'étude des suites est l'occasion d'une sensibilisation à l'idée de limite. Toute formalisation est exclue, mais sur des exemples, on s'attachera à en développer une intuition en s'appuyant sur des calculs numériques, des algorithmes de recherche de seuil.

Démonstrations

- Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.;
- Calcul de $1 + 2 + \dots + n$
- Calcul de $1 + q + \dots + q^n$

1 Généralités sur les suites

Définition d'une suite numérique

Définition 1.1: Suite numérique

Une **suite numérique** réelle est une fonction u définie sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} .

Pour tout entier naturel n , l'image est notée $u(n)$ ou u_n et est appelée **terme de rang n** de la suite.

La suite elle-même est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

Exemple

La suite des nombres pairs : $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6$, etc.

La suite des carrés : $v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = 4, v_3 = 9$, etc.

Modes de génération d'une suite

Définition 1.2: Suite définie par formule explicite

Une suite (u_n) est définie par une **formule explicite** s'il existe une fonction f telle que pour tout entier naturel n :

$$u_n = f(n)$$

Exemple

$u_n = 2n + 1$ (suite des nombres impairs)

$v_n = (n - 4)^2$

$w_n = \frac{1}{n}$ (suite définie à partir de $n = 1$)

Remarque

Avec une formule explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme sans avoir besoin des termes précédents.

Définition 1.3: Suite définie par récurrence

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** s'il existe une fonction f telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec la donnée du premier terme u_0 (ou u_1).

Exemple

$u_{n+1} = 4u_n + 5$ avec $u_0 = 6$

$v_{n+1} = \sqrt{v_n + 5}$ avec $v_0 = 4$

Remarque

Avec une définition par récurrence, on doit calculer les termes les uns après les autres pour atteindre un terme donné.

Suite définie par un contexte combinatoire

Définition 1.4: Suite définie par un contexte combinatoire

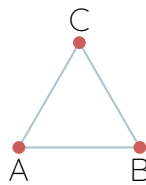
Une suite (u_n) est définie par un **contexte combinatoire** si chaque terme u_n représente un nombre de configurations (arrangements, combinaisons, etc.) dans un problème de dénombrement.

Exemple

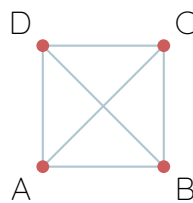
Nombre de segments entre n points

Considérons n points distincts, et nous voulons compter le nombre de segments que l'on peut tracer en reliant ces points deux à deux.

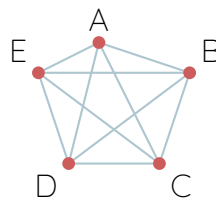
- Pour $n = 3$: $u_3 = 3$



- Pour $n = 4$: $u_4 = 6$



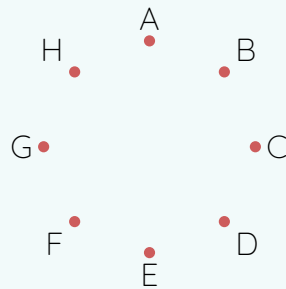
- Pour $n = 5$: $u_5 = 10$



La formule générale est $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 1.1 – Combinatoire

Niveau = ★★☆☆

Application : Combien de segments peut-on tracer entre 8 points distincts ? Faire une figure.**Indication :** Utilise la formule $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$ pour vérifier.**Remarque**

Ce problème est équivalent à :

- Compter le nombre de poignées de main entre n personnes
- Compter le nombre de matchs dans un championnat où chaque équipe rencontre toutes les autres
- Compter le nombre d'arêtes dans un graphe complet à n sommets

La formule $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$ apparaît dans de nombreux contextes combinatoires.

Suite définie par un programme algorithmique

Définition 1.5: Suite définie par un programmeUne suite (u_n) peut être générée par un **programme algorithmique** qui calcule ses termes successifs à partir d'instructions précises.Le programme prend généralement en entrée un entier n et retourne les valeurs u_0, u_1, \dots, u_n .**Exemple****Algorithme de génération d'une suite**

- **Initialisation :** $w \leftarrow 10$
- **Raison :** $r \leftarrow -2$
- **Nombre d'itérations :** $n \leftarrow 6$
- **Processus :**
 1. Afficher $w_0 = 10$
 2. Pour i de 1 à 6 :
 - $w \leftarrow w + (-2)$
 - Afficher $w_i =$ nouvelle valeur

Résultat :

i	0	1	2	3	4	5	6
w_i	10	8	6	4	2	0	-2

- On observe que chaque terme s'obtient en ajoutant -2 au terme précédent, ce qui correspond à une diminution régulière de 2 à chaque étape.

Suite définie par des motifs géométriques

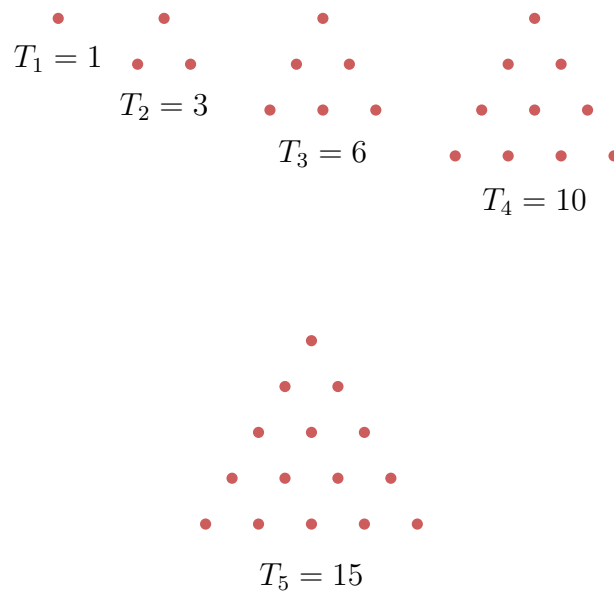
Définition 1.6: Suite définie par des motifs géométriques

Une suite (u_n) est définie par des **motifs géométriques** lorsque ses termes correspondent au comptage d'éléments dans une figure géométrique qui s'agrandit selon un motif régulier.

Exemple

La suite des nombres triangulaires (T_n)

Chaque terme T_n représente le nombre de points dans un triangle équilatéral rempli de points selon un motif triangulaire.



Les valeurs de la suite sont :

- $T_1 = 1$
- $T_2 = 3$
- $T_3 = 6$
- $T_4 = 10$
- $T_5 = 15$
- $T_6 = T_5 + 6 = 21$

Remarque

La relation de récurrence pour les nombres triangulaires est :

$$T_{n+1} = T_n + (n + 1)$$

avec $T_1 = 1$.

La formule explicite est :

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Exercice 1.2 – Motifs géométriques

Niveau = ★☆☆☆☆

Application : Combien de points contient le triangle T_7 ?



$$T_6 = 21 \text{ points} + 7 \text{ points} = ?$$

Indication : Utilise la relation $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$ ou la formule $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Représentation graphique d'une suite

Définition 1.7: Représentation graphique

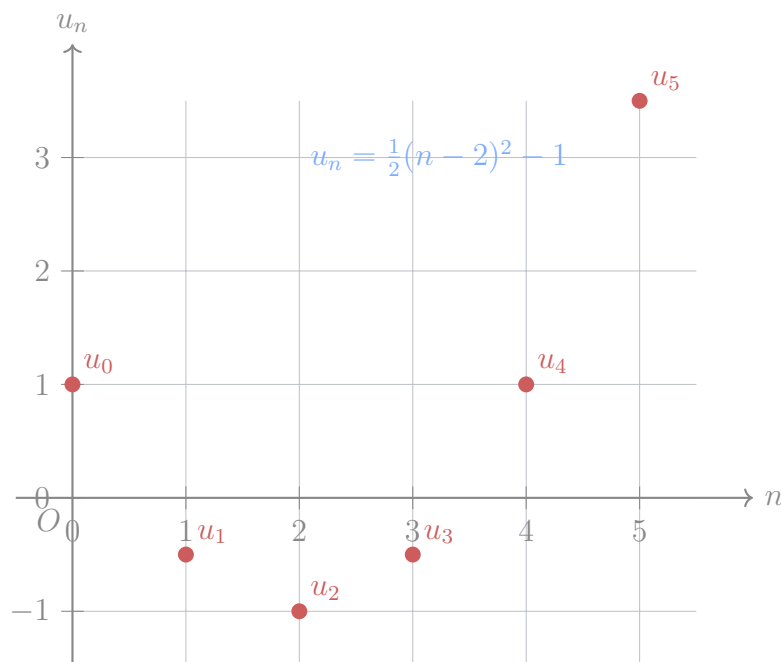
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. La **représentation graphique** de la suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Représentation graphique de la suite $u_n = \frac{1}{2}(n-2)^2 - 1$

Les points ont pour coordonnées $(n; u_n)$

L'abscisse représente l'indice n et l'ordonnée représente la valeur $u(n)$ notée u_n .



Calcul des premiers termes :

- $u_0 = \frac{1}{2}(0 - 2)^2 - 1 = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 2 - 1 = 1$
- $u_1 = \frac{1}{2}(1 - 2)^2 - 1 = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = 0.5 - 1 = -0.5$
- $u_2 = \frac{1}{2}(2 - 2)^2 - 1 = \frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$
- $u_3 = \frac{1}{2}(3 - 2)^2 - 1 = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = 0.5 - 1 = -0.5$
- $u_4 = \frac{1}{2}(4 - 2)^2 - 1 = \frac{1}{2} \times 4 - 1 = 2 - 1 = 1$
- $u_5 = \frac{1}{2}(5 - 2)^2 - 1 = \frac{1}{2} \times 9 - 1 = 4.5 - 1 = 3.5$

Représentation graphique d'une suite récurrente

Définition 1.8: Représentation graphique d'une suite récurrente

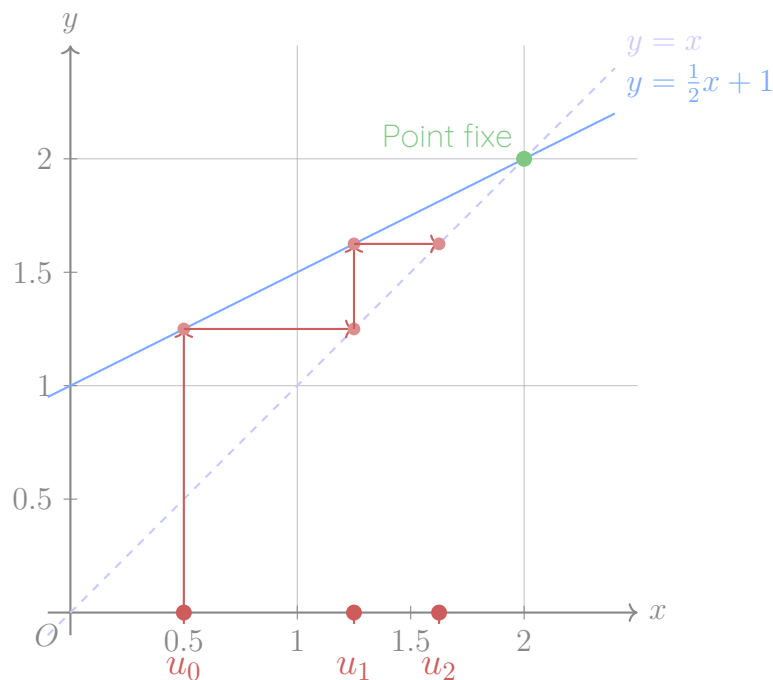
Pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut représenter graphiquement les termes en utilisant :

- La courbe représentative de la fonction f
- La droite d'équation $y = x$
- Une construction en "escalier" ou "toile d'araignée"

Exemple (Construction en escalier)

Représentation graphique de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0.5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$



Méthode de construction :

1. Les termes u_n de la suite (u_n) sont placés sur l'axe des abscisses.
2. Partant de u_0 sur l'axe des abscisses, tracer la verticale jusqu'à la courbe de f
3. Tracer l'horizontale jusqu'à la droite $y = x$ pour obtenir u_1 sur l'axe des abscisses
4. Répéter le processus : verticale vers f , puis horizontale vers $y = x$
5. Les valeurs successives u_0, u_1, u_2, \dots apparaissent sur l'axe des abscisses

Calcul des premiers termes :

$$u_0 = 0.5$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 0.5 + 1 = 1.25$$

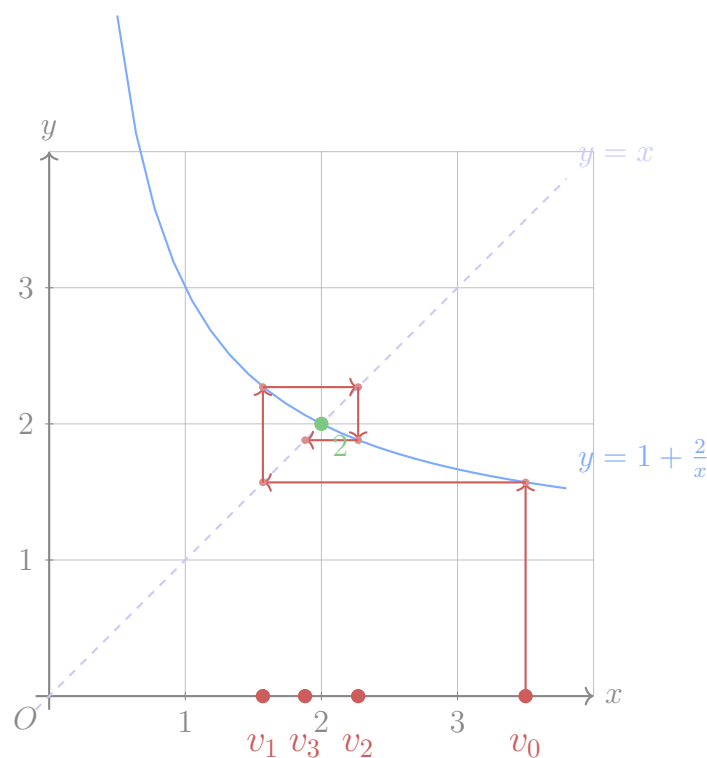
$$u_2 = \frac{1}{2} \times 1.25 + 1 = 1.625$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \times 1.625 + 1 = 1.8125$$

Exemple (Construction en toile d'araignée)

Représentation graphique de la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 3.5 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{2}{v_n}$$

**Méthode de construction :**

1. Une fois v_0 placé sur l'axe des abscisses, les termes suivants v_n de la suite (v_n) seront placés aussi sur l'axe des abscisses.
2. Partant de v_0 sur l'axe des abscisses, tracer la verticale jusqu'à la courbe de f
3. Tracer l'horizontale jusqu'à la droite d'équation $y = x$ pour obtenir v_1 sur l'axe des abscisses
4. Répéter le processus : verticale vers f , puis horizontale vers $y = x$
5. Les valeurs successives v_0, v_1, v_2, \dots apparaissent sur l'axe des abscisses

Calcul des premiers termes :

$$v_0 = 3.5$$

$$v_1 = 1 + \frac{2}{3.5} \approx 1.57$$

$$v_2 = 1 + \frac{2}{1.57} \approx 2.27$$

$$v_3 = 1 + \frac{2}{2.27} \approx 1.88$$

$$v_4 = 1 + \frac{2}{1.88} \approx 2.06$$

Comportement : Cette suite présente une convergence en spirale (toile d'araignée) vers le point fixe $x = 2$ abscisse du point vert placé sur la figure.

Remarque. Dans cette représentation, les termes de la suite (v_n) sont placés sur l'axe des abscisses

- Le **point fixe** est l'intersection entre la courbe de f et la droite $y = x$
- Si la suite converge, elle tend vers le point fixe
- La forme en spirale de la construction montre une convergence oscillante

Exercice 1.3 – Représentation graphique

Niveau = ★★☆☆☆

Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 3 \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \sqrt{w_n + 1}$$

Indication : La fonction associée est $f(x) = \sqrt{x + 1}$

2 Sens de variation d'une suite

Définition 2.1: (Sens de variation à partir d'un rang n_0).

Soit (u_n) une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- (u_n) est **croissante à partir du rang** n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$
- (u_n) est **décroissante à partir du rang** n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) est **constante à partir du rang** n_0 si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$
- (u_n) est **monotone à partir du rang** n_0 si elle est croissante ou décroissante à partir de n_0

Remarque

1. Une suite peut changer de comportement avant n_0 , mais sa monotonie est caractérisée à partir de n_0 .
2. La **monotonie globale** (sur \mathbb{N}) est un cas particulier où $n_0 = 0$ (ou le premier terme).
3. Une suite constante à partir de n_0 est à la fois croissante et décroissante à partir de ce rang.

Méthodes pour étudier les variations

Propriété 2.1: Méthode de la différence

Pour étudier les variations de (u_n) , on étudie le signe de la différence :

$$u_{n+1} - u_n$$

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0

Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$.

$$u_{n+1} - u_n = [2(n+1) + 1] - (2n + 1) = 2 > 0$$

Donc (u_n) est croissante à partir du rang $n = 0$.

Dans ce cas ($n = 0$) il est inutile de préciser le rang et on dit que (u_n) est croissante.

Propriété 2.2: Méthode du quotient (pour suites à termes strictement positifs)

Si $u_n > 0$ pour tout n , on peut étudier le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout n , alors (u_n) est croissante
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout n , alors (u_n) est décroissante

Remarque

Important : Ces méthodes ne sont que des reformulations de la définition. Il n'est pas nécessaire de les apprendre par cœur, mais de comprendre qu'elles découlent directement de la définition :

- La méthode de la différence vient de $u_{n+1} - u_n \geq 0$ qui équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$
- La méthode du quotient (pour $u_n > 0$) vient de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ qui équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

Attention : Pour la méthode du quotient, si $u_n < 0$ pour tout n , alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$ (car diviser par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité).

Il est donc plus sûr de revenir à la définition et de choisir la méthode la plus adaptée en fonction de la suite.

Propriété 2.3: Utilisation de la fonction associée

Si $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$, et si f est monotone sur cet intervalle, alors (u_n) a les mêmes variations que f .

Remarque

Attention : Cette propriété s'applique uniquement lorsque la suite est définie par une formule explicite $u_n = f(n)$.

Pour les suites définies par récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, il n'y a pas de lien direct entre les variations de la fonction g et les variations de la suite (u_n) . Une fonction g croissante ne garantit pas que la suite soit aussi croissante, et une fonction g décroissante peut donner une suite qui n'est pas monotone ou qui alterne autour d'une valeur.

3 Suites arithmétiques

Définition 3.1: Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r (appelé **raison**) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots$$

Remarque

Pour comprendre les suites arithmétiques :

Imaginez que vous marchez en ligne droite avec des pas de longueur constante :

- Chaque pas a la même longueur (la **raison**)
- Vous pouvez avancer (raison positive) ou reculer (raison négative)
- Votre position après chaque pas suit une suite arithmétique

Pour passer d'un terme au terme suivant une suite arithmétique ajoute toujours le même nombre réel appelé raison de la suite.

Théorème 3.1: Formule explicite d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Alors $u_n = 2 + 3n$. Si on cherche à calculer $u(5)$ on a : $u_5 = 2 + 3 \times 5 = 17$

Théorème 3.2: Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante

Remarque

Pour retenir ce théorème :

Pensez à la raison r comme à la **pente** de la suite :

- $r > 0$ = pente positive = la suite "monte" on dit plutôt qu'elle est strictement croissante.
- $r < 0$ = pente négative = la suite "descend" on dit plutôt qu'elle est strictement décroissante.
- $r = 0$ = pente nulle = la suite est "plate" on dit plutôt qu'elle est constante.

C'est logique car chaque terme s'obtient en ajoutant r au précédent!

Théorème 3.3: Démonstration de la somme des n premiers entiers

Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration : Soit $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

En écrivant la somme dans l'ordre inverse :

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

En additionnant les deux expressions :

$$2S_n = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \dots + (n+1)$$

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$$

Donc :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple

Somme : $10 + 12 + 14 + \dots + 30$

C'est une suite arithmétique de raison 2.

Le premier terme est 10, le dernier terme est 30.

Calculons le nombre de termes n :

On note n le nombre de termes. Le dernier terme s'exprime par $10 + 2(n-1) = 30$.

$$2(n-1) = 20$$

$$n-1 = 10$$

$$n = 11$$

Méthode intuitive (comme Gauss) :

Si on écrit la somme deux fois, une fois dans l'ordre et une fois dans l'ordre inverse :

$$\begin{array}{r} S = 10 + 12 + 14 + \dots + 30 \\ S = 30 + 28 + 26 + \dots + 10 \\ \hline 2S = 40 + 40 + 40 + \dots + 40 \end{array}$$

On a 11 termes de 40, donc :

$$2S = 11 \times 40 = 440 \quad \text{soit} \quad S = 220$$

Formule générale :

La somme est donc :

$$S = n \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 11 \times \frac{10 + 30}{2} = 11 \times 20 = 220$$

4 Suites géométriques

Définition 4.1: Suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel $q \neq 0$ (appelé **raison**) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \dots$$

Théorème 4.1: Formule explicite d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

Alors $u_n = 3 \times 2^n$.

$$u_4 = 3 \times 2^4 = 48$$

Théorème 4.2: Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0 .

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors (u_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors (u_n) est strictement décroissante
- Si $q = 1$, alors (u_n) est constante
- Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, alors (u_n) n'est pas monotone (alternée)

Théorème 4.3: Démonstration de la somme des n premières puissances de q ($q \neq 1$)

Pour tout $q \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

Soit $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

On a : $qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$

En soustrayant terme à terme dans les deux égalités :

On a $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$

Donc : $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$

Et puisque $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

Dans le cas général, pour calculer la somme de $k + 1$ termes consécutifs $u_p + u_{p+1} + \dots + u_{p+k}$ (dans ce cas le premier terme n'est pas égale à 1) on procède ainsi :

$$\begin{aligned} S &= u_p + u_{p+1} + \dots + u_{p+k} \\ &= u_p + u_p q + u_p q^2 + \dots + u_p q^k \\ &= u_p (1 + q + q^2 + \dots + q^k) && \text{ici on applique la formule du cours} \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Exemple (Détailé)

Calcul de la somme : $S = 10 + 20 + 40 + 80 + \dots + 1280$

Étape 1 : Reconnaître la nature de la suite

On observe que :

$$\frac{20}{10} = 2, \quad \frac{40}{20} = 2, \quad \frac{80}{40} = 2$$

Sur cet exemple pour passer d'un terme quelconque au suivant on multiplie toujours par 2, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $q = 2$.

Étape 2 : Exprimer les termes avec des puissances

$$\begin{aligned} 10 &= 10 \times 2^0 \\ 20 &= 10 \times 2^1 \\ 40 &= 10 \times 2^2 \\ 80 &= 10 \times 2^3 \\ &\vdots \\ 1280 &= 10 \times 2^7 \end{aligned}$$

Étape 3 : Factoriser par le premier terme

$$\begin{aligned} S &= 10 \times 2^0 + 10 \times 2^1 + 10 \times 2^2 + \dots + 10 \times 2^7 \\ S &= 10 \times (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^7) \end{aligned}$$

Étape 4 : Appliquer la formule du cours

On reconnaît la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^7 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7$$

D'après la formule :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

avec $q = 2$ et $n = 7$ (car il y a 8 termes, de 2^0 à 2^7) :

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7 = \frac{1 - 2^{7+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^8}{-1}$$

Étape 5 : Calcul final

$$\begin{aligned}
 S &= 10 \times \frac{1 - 2^8}{-1} \\
 &= 10 \times \frac{1 - 256}{-1} \\
 &= 10 \times \frac{-255}{-1} \\
 &= 10 \times 255 \\
 &= 2550
 \end{aligned}$$

Vérification : On a bien 8 termes dans la somme, et le calcul donne $S = 2550$.

5 Limite d'une suite

Remarque

Dans ce programme, on se contente de conjecturer la limite éventuelle d'une suite à l'aide de calculs numériques ou de représentations graphiques.

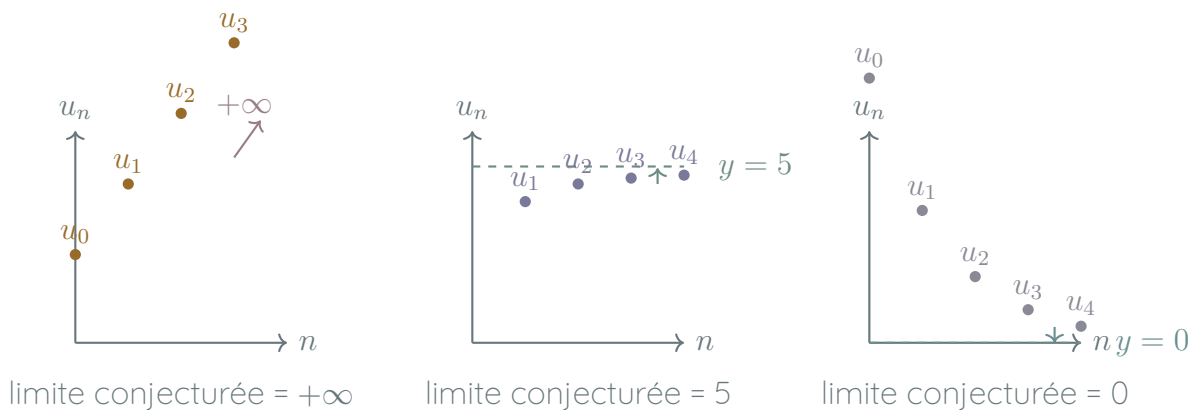


Figure 1 - Les trois types de comportement de limite pour les suites

Exemple (Types de comportement)

Type 1 : $u_n = 5 + 4n$

Lorsque n devient très grand, u_n devient très grand.

On conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Type 2 : $u_n = 5 - \frac{1}{n}$

Lorsque n devient très grand, u_n se rapproche de 5.

On conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

Type 3 : $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Lorsque n devient très grand, u_n se rapproche de 0.

On conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exemple (Comportements types - Détail)

Type 1 : $u_n = 5 + 4n$

Tableau de valeurs :

n	0	1	2	30	1000	$\rightarrow +\infty$
u_n	5	9	13	125	4005	$\rightarrow +\infty$

Conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Type 2 : $u_n = 5 - \frac{1}{n}$

Tableau de valeurs :

n	1	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
u_n	4	4,9	4,99	4,999	$\rightarrow 5$

Conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

Type 3 : $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Tableau de valeurs :

n	0	1	2	10	$\rightarrow +\infty$
u_n	5	2,5	1,25	0,005	$\rightarrow 0$

Conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

6 Algorithmes Python

Remarque

Les algorithmes permettent d'étudier concrètement le comportement des suites.

Exemple (Calcul d'un terme de rang donné)

Problème : Calculer u_n pour la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$

```
def terme(n):
    u = 3
    for i in range(1,n+1): # range(1,5) = [1,2,3,4]
        u = 2*u + 5
    return u

terme(2) # retourne 27
```

Exemple (Recherche de seuil)

Problème : Trouver le plus petit entier n tel que $u_n > A$ (seuil donné)

```
def seuil(A):
    u = 3
    n = 0
    while u <= A:
        u = 2*u + 5
        n = n + 1
    return n

seuil(100) # retourne 4
```

Exemple (Calcul d'une somme)**Problème** : Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

```
def somme(n):
    u = 3
    S = u
    for i in range(n):
        u = 2*u + 5
        S = S + u
    return S

print(somme(2)) # affiche 41
```

Codes Python pour les suites arithmétiques et géométriques**Exemple (Suite arithmétique - Formule explicite)****Problème** : Calculer u_n pour une suite arithmétique avec formule explicite

```
def suite_arithmetique_explicite(u0, r, n) :
    return u0 + n * r
# Exemple d'utilisation
u0 = 2
r = 3
n = 5
resultat = suite_arithmetique_explicite(u0, r, n)
print(f"u{n}={resultat}") # Affiche : u5 = 17
```

Exemple (Suite arithmétique - Formule récursive)**Problème** : Calculer u_n pour une suite arithmétique avec formule récursive

```
def suite_arithmetique_recursive(u0, r, n) :
    u = u0
    for i in range(n) :
        u = u + r
    return u
# Exemple d'utilisation
u0 = 2
r = 3
n = 5
resultat = suite_arithmetique_recursive(u0, r, n)
print(f"u{n}={resultat}") # Affiche : u5 = 17
```

Exemple (Suite géométrique - Formule explicite)**Problème** : Calculer u_n pour une suite géométrique avec formule explicite

```
def suite_geometrique_explicite(u0, q, n) :
    return u0 * (q ** n)
# Exemple d'utilisation
u0 = 3
q = 2
```

```
n = 4
resultat = suite_geometrique_explicite(u0, q, n)
print(f"u{n}={resultat}") # Affiche : u4 = 48
```

Exemple (Suite géométrique - Formule récursive)

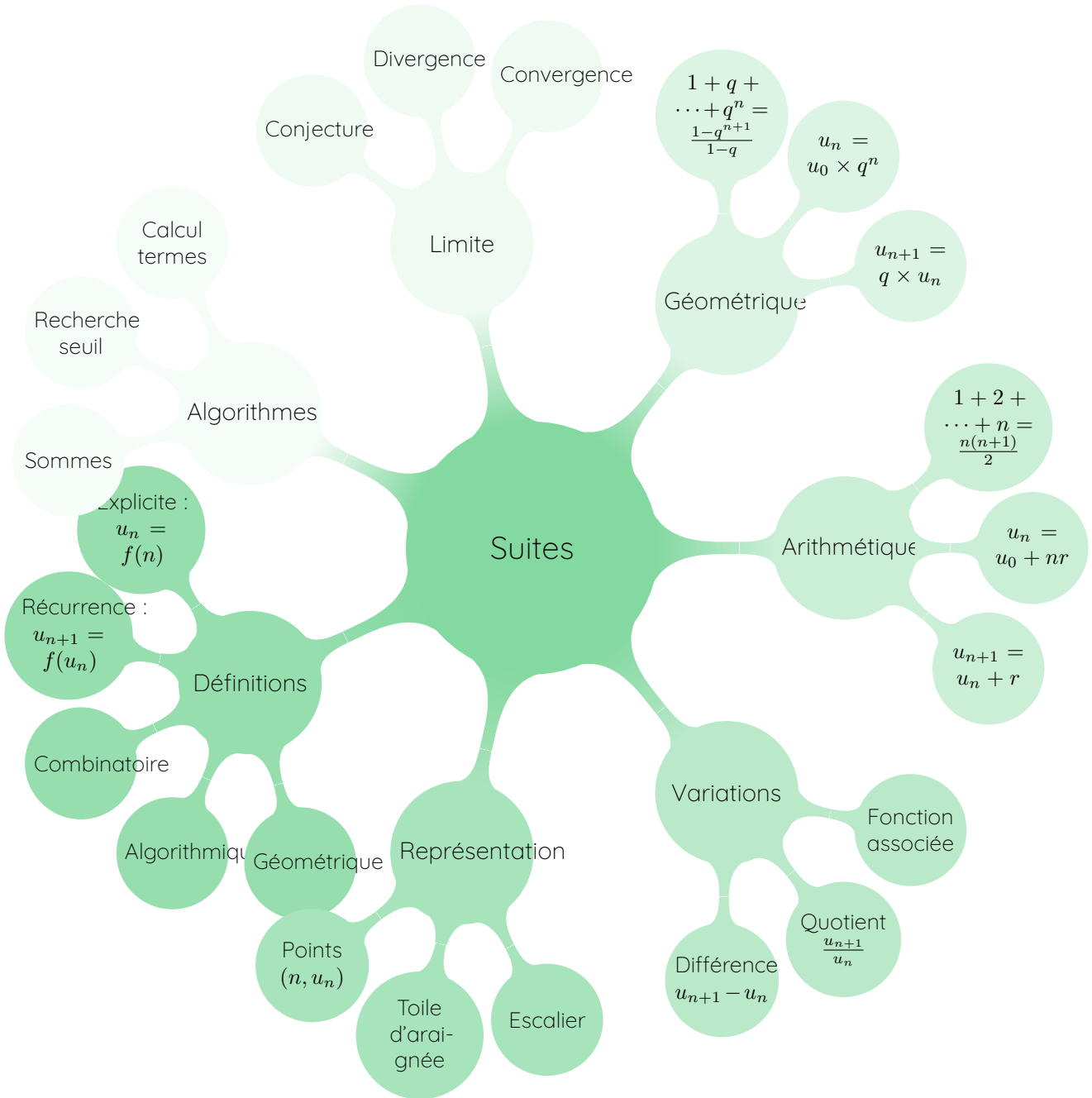
Problème : Calculer u_n pour une suite géométrique avec formule récursive

```
def suite_geometrique_recursive(u0, q, n) :
    u = u0
    for i in range(n) :
        u = u * q
    return u
u0 = 3
q = 2
n = 4
resultat = suite_geometrique_recursive(u0, q, n)
print(f"u{n}={resultat}") # Affiche : u4 = 48
```

Remarque

Comparaison des approches :

- Les formules **explicites** permettent un calcul direct avec un "return" sans avoir besoin de boucle for pour calculer les termes précédents.
- Les formules **récursives** nécessitent de calculer tous les termes intermédiaires, donc on utilise une boucle.
- Pour les très grands nombres, les formules explicites sont plus efficaces.
- Les formules récursives sont utiles quand on ne connaît pas la formule explicite.



7 Exercices d'entraînement

Exercice 7.1 –

Porte-monnaie de Maxime

Maxime a 40 € dans son porte-monnaie le 1^{er} janvier 2019 au matin. Tous les jours, il dépense le quart de ce qu'il a dans son porte-monnaie et retire 25 € le soir dans un distributeur pour mettre dans son porte-monnaie.

On note u_n la somme qu'il aura dans son porte monnaie n jours après le 1^{er} janvier, au matin. On a $u_0 = 40$.

1. Combien aura-t-il dans son porte monnaie le 2 janvier au matin ?
2. Donner la valeur de u_0 , u_1 et u_2 .
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,75u_n + 25$.
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = u_n - 100$.
 - a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - b) Déterminer la valeur de v_0 .
 - c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - e) Combien aura-t-il dans son porte-monnaie le 15 janvier au matin ?

Exercice 7.2 –

Modéliser avec des suites

Kenza veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B. Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 € par an en 2019.

Partie A - Assureur A (augmentation de 10 € par an)

1. Déterminer la valeur de u_0 et de u_1
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur A en 2030 ?
5. Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?

Partie B - Assureur B (augmentation de 2% par an)

6. Déterminer la valeur de v_0 et de v_1 .
7. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
8. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
9. Quel sera le prix de la mutuelle de l'assureur B en 2030 ?
10. Combien Kenza aura-t-elle payé au total en 25 ans si elle choisit l'assureur B ?

Partie C - Comparaison

11. À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A.

Exercice 7.3 —

Le marathon de Nathalie

Nathalie décide de courir un marathon (42,195 km). Mais elle s'essouffle vite.

Elle parcourt la moitié de la distance et fait une pause. Elle reprend alors la course et parcourt de nouveau la moitié de la distance qu'il reste et fait encore une pause. Et ainsi de suite.

1. Combien de pauses faut-il pour parcourir 42,194 km ?
2. Elle ne peut pas faire un pas de moins de 10 cm. Après combien de pauses terminera-t-elle le marathon ?

Exercice 7.4 —

Formules de suites

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 2$$

1. La formule ci-dessus est-elle une formule de récurrence, une formule explicite ou aucune des deux ?
2. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Les valeurs seront données sous forme fractionnaire.

Exercice 7.5 —

Sens de variation

Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous :

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,6^n + 8$
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + n^2 + v_n$ et $v_0 = 23$

Exercice 7.6 —

Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ telle que $u_6 = 42,6$ et $u_{13} = 74,8$.

1. Déterminer la raison r de la suite (u_n) .
2. Calculer u_0 .
3. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Exercice 7.7 —

Modélisation de contrat

Une société propose des contrats d'entretien. Chaque année, 14% de contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés. En 2020 : 120 contrats.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,14u_n - 7$
2. Estimer le nombre de contrats en 2022
3. Compléter l'algorithme de recherche du dépassement de 190 contrats
4. Démontrer que $v_n = u_n - 50$ est géométrique
5. Exprimer u_n en fonction de n
6. Étudier les variations de (u_n)

Exercice 7.8 —

Inéquation et suite arithmétique

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $2x^2 \geq x + 28$
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r avec $u_{33} = 252,4$ et $u_{81} = 550$. Déterminer r , u_1 et u_{148}

Exercice 7.9 —

Étude de suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+2)(n+3)}$
3. Étudier les variations de (u_n)
4. Exprimer $u_n - 2$ et en déduire que $u_n < 2$ pour tout n

Exercice 7.10 —

Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+$ avec $u_5 = \frac{1}{128}$ et $u_9 = \frac{1}{2048}$.

1. Déterminer q et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. Calculer u_{11}

Exercice 7.11 —

Refroidissement d'un gâteau

Un gâteau sort à 210°C dans une pièce à 25°C . La température suit : $t_{n+1} = 0,8t_n + 5$.

1. Calculer t_1 et t_2
2. Montrer que $u_n = t_n - 25$ est géométrique
3. Exprimer t_n en fonction de n
4. Déterminer quand la température passe sous 30°C